ÉLECTRICITÉ

EXERCICES ET PROBLÈMES CORRIGÉS

Jean-Pierre Dubarry-Barbe
Antoine Frey





ÉLECTRICITÉ

Exercices et problèmes corrigés

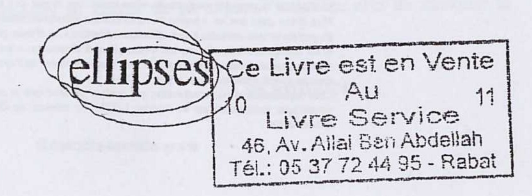
Classes préparatoires
MPSI, PCSI, PTSI

Solutions proposées par

Jean-Pierre DUBARRY-BARBE
Agrégé de physique

Antoine FREY
Agrégé de physique

Professeurs en classes préparatoires MPSI et PCSI



ISBN 978-2-7298-5108-8
©Ellipses Édition Marketing S.A., 2009
32, rue Bargue 75740 Paris cedex 15



www.editions-ellipses.fr

AVERTISSEMENT

Les étudiants sortant de l'enseignement secondaire éprouvent beaucoup de difficultés à s'adapter aux exigences de l'enseignement supérieur. Une des grandes différences entre ces enseignements tient à l'esprit des exercices et des problèmes à résoudre. Dans l'enseignement secondaire, ceux-ci sont "cadrés" par des programmes directifs. Il en résulte qu'une bonne connaissance du cours suffit en général à l'étudiant pour réussir. Dans l'enseignement supérieur, si une bonne compréhension du cours est indispensable, elle est souvent insuffisante car les énoncés abordent systématiquement des phénomènes allant bien plus loin que le contenu du cours. Pour réussir, l'étudiant doit donc apprendre à se prendre en main et à accroître **lui-même** ses connaissances à travers la résolution d'exercices et de problèmes.

C'est dans ce but que les auteurs ont conçu ce livre. Chaque chapitre a été structuré de manière à mener progressivement l'étudiant du cours aux problèmes de concours. Cette progression est la suivante :

- Les premiers exercices sont des exercices de type cours, simples dans leur résolution mais riches pédagogiquement. Ces exercices sont souvent suivis de remarques notant une méthode de résolution, une astuce à connaître ou une interprétation physique intéressante.
- Les exercices suivants sont plus difficiles et sont du niveau des exercices de "Khôlle" que les étudiants rencontreront lors des interrogations orales.
- Les derniers exercices sont tirés de problèmes d'écrit de concours. Leur difficulté est variable.
- Enfin, pour conclure chaque chapitre, l'étudiant pourra tester son niveau en résolvant de larges extraits de problèmes de concours.

Pour tirer vraiment profit de ce livre, il est clair que le lecteur devra chercher lui-même les solutions et comparer ses résultats avec ceux proposés. **Ce travail personnel est indispensable pour progresser**, car lire simplement la solution d'un exercice sans l'avoir préalablement cherché n'apporte… strictement rien.

Pour augmenter l'efficacité de la lecture de cet ouvrage, nous avons tenu compte de certaines remarques de nos étudiants par rapport à la rédaction et à l'utilisation de nos précédents livres :

- Le lecteur trouvera au début de chaque problème des indications concernant les acquis indispensables avant de se lancer dans sa résolution.

- S'il ne voit pas comment résoudre un exercice (ou une question d'un problème), nous recommandons au lecteur de chercher environ pendant 10 minutes avant de commencer à regarder la solution. Ce temps minimum lui permettra de mieux mémoriser la cause de son échec : lacune de cours, méthode de résolution non connue, erreur de calcul … Il est en effet fondamental de ne pas se retrouver encore en échec pour la même raison dans un autre exercice (ou problème).

- Afin d'éviter de regarder trop rapidement la solution d'un exercice ou d'un problème, nous recommandons au lecteur de se munir d'un cache afin de masquer la solution.

Les auteurs

TABLE DES MATIÈRES

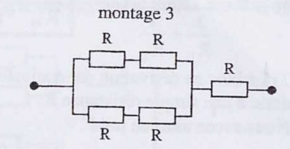
Circuits en courant continu

Exercice 1

On considère les trois montages suivants :

montage 1 — montage 2 — montage 3

R_1 R_2 (montage 1) ; R_2, R_1 (montage 2)



1) Montrer que le premier montage équivaut à une résistance unique R_{eq} telle que :

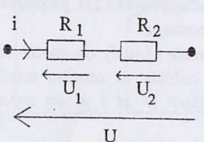
$$R_{eq} = R_1 + R_2$$

2) Montrer que le deuxième montage équivaut à une résistance unique R_{eq} telle que :

$$\frac{1}{R_{eq}} = \frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2}$$

3) A l'aide des équivalences précédentes, donner la valeur de la résistance équivalente au montage 3.

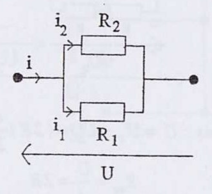
1) Considérons un courant i parcourant le dipôle :



Nous avons : $U = U_1 + U_2 = R_1 i + R_2 i = (R_1 + R_2)i$. Comme la résistance d'un dipôle est définie par $R_{eq} = \frac{U}{i}$, on obtient ici :

$$\boxed{R_{eq} = R_1 + R_2}$$

2) En reprenant la méthode précédente, on obtient :



Nous avons alors : $i = i_1 + i_2 = \frac{U}{R_1} + \frac{U}{R_2} = \left(\frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2}\right)U$

Comme la résistance d'un montage est définie par la relation $R = \frac{U}{i}$, on en déduit ici :

$R = \frac{U}{i} = \frac{1}{\frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2}}$ soit : $\boxed{\frac{1}{R_{eq}} = \frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2}}$

3) Le bloc en dérivation est équivalent à 2R en dérivation avec 2R. L'ensemble équivaut donc à une simple résistance R.
Nous avons ainsi au total :

$$\boxed{R_{eq} = R + R = 2R}$$

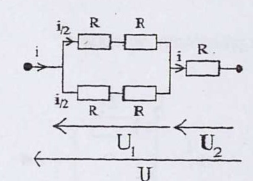
Remarques

1) Les formules des équivalences $R_{eq} = \Sigma R_i$ (montage en série) et $\frac{1}{R_{eq}} = \Sigma \frac{1}{R_i}$ (montage en dérivation) doivent être parfaitement maîtrisées. En particulier, n résistors de résistances R montés en dérivation équivalent à un résistor unique de résistance $R_{eq} = \frac{R}{n}$. Dans les exercices et problèmes, on trouve souvent les cas n = 2 ou n = 3.

2) Il y a deux méthodes pour calculer une résistance équivalente :
a) On trouve le schéma équivalent avec des résistances montées en série et en dérivation. Il suffit ensuite d'appliquer les formules des équivalences pour trouver la résistance de la totalité du montage.
b) A partir d'une intensité totale i (ou I), on étudie la répartition des intensités dans les différentes branches et on calcule la tension totale U aux bornes du montage. On cherche alors la relation liant U et i et on calcule la résistance équivalente par $R_{eq} = \frac{U}{i}$.

Appliquer à la troisième question de l'exercice, cette méthode s'utiliserait de la manière suivante :

Le courant total i se sépare en deux courants identiques $\frac{i}{2}$ dans les deux branches montées en dérivation puisque les résistances de ces deux branches sont identiques.

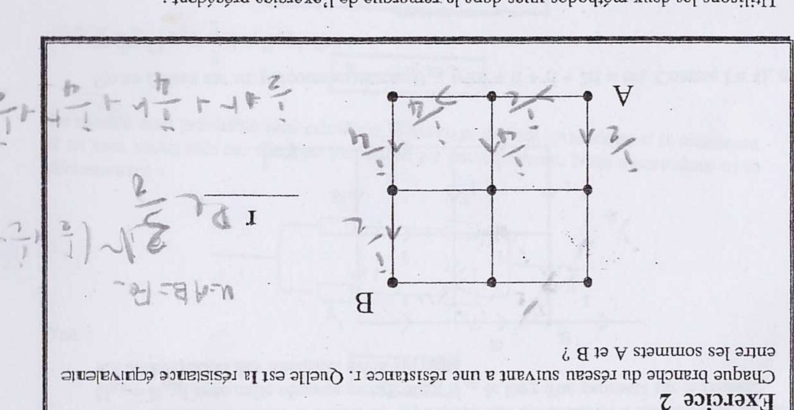


On en déduit pour les tensions : $U = U_1 + U_2 = (2R)\frac{i}{2} + Ri = 2Ri$

d'où $R_{eq} = \frac{U}{i} = 2R$

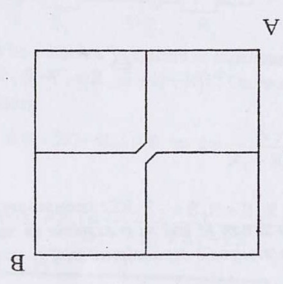
L'exercice suivant montre comment on peut utiliser les deux méthodes sur un exemple plus complexe.

Exercice 2
Chaque branche du réseau suivant a une résistance r. Quelle est la résistance équivalente entre les sommets A et B ?

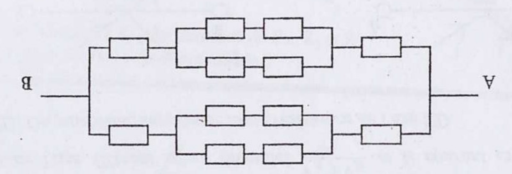


Utilisons les deux méthodes vues dans la remarque de l'exercice précédent :

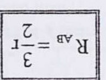
1) Passage au montage des résistances équivalentes



L'axe AB étant un axe de symétrie, les courants se répartissent symétriquement de part et d'autre de cet axe. Il en résulte que l'on peut déconnecter les fils au centre. Le montage équivaut alors à :



Chaque branche valant 3r, la résistance R_{AB} vaut :



$$\boxed{R_{AB} = \frac{3}{2}r}$$

Nous avons alors : $i = i_1 + i_2 = \dfrac{U}{R_1} + \dfrac{U}{R_2} = \left(\dfrac{1}{R_1} + \dfrac{1}{R_2}\right)U$

Comme la résistance d'un montage est définie par la relation $R = \dfrac{U}{i}$, on en déduit ici :

$R = \dfrac{U}{i} = \dfrac{1}{\dfrac{1}{R_1} + \dfrac{1}{R_2}}$ soit : $\boxed{\dfrac{1}{R_{eq}} = \dfrac{1}{R_1} + \dfrac{1}{R_2}}$

3) Le bloc en dérivation est équivalent à 2R en dérivation avec 2R. L'ensemble équivaut donc à une simple résistance R.
Nous avons ainsi au total :

$$\boxed{R_{eq} = R + R = 2R}$$

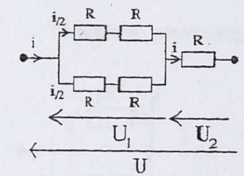
Remarques

1) Les formules des équivalences $R_{eq} = \Sigma R_i$ *(montage en série) et* $\dfrac{1}{R_{eq}} = \Sigma \dfrac{1}{R_i}$ *(montage en dérivation) doivent être parfaitement maîtrisées. En particulier, n résistors de résistances R montés en dérivation équivalent à un résistor unique de résistance* $R_{eq} = \dfrac{R}{n}$. *Dans les exercices et problèmes, on trouve souvent les cas n = 2 ou n = 3.*

2) Il y a deux méthodes pour calculer une résistance équivalente :
a) On trouve le schéma équivalent avec des résistances montées en série et en dérivation. Il suffit ensuite d'appliquer les formules des équivalences pour trouver la résistance de la totalité du montage.
b) A partir d'une intensité totale i (ou I), on étudie la répartition des intensités dans les différentes branches et on calcule la tension totale U aux bornes du montage. On cherche alors la relation liant U et i et on calcule la résistance équivalente par $R_{eq} = \dfrac{U}{i}$.

Appliquer à la troisième question de l'exercice, cette méthode s'utiliserait de la manière suivante :

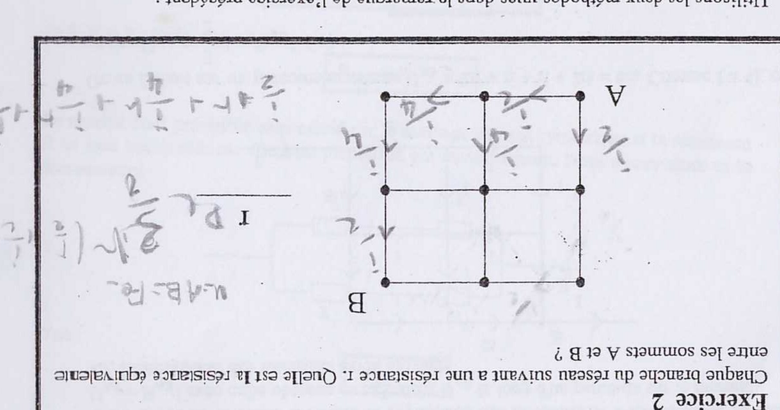
Le courant total i se sépare en deux courants identiques $\dfrac{i}{2}$ *dans les deux branches montées en dérivation puisque les résistances de ces deux branches sont identiques.*



On en déduit pour les tensions : $U = U_1 + U_2 = (2R)\dfrac{i}{2} + Ri = 2Ri$

d'où $R_{eq} = \dfrac{U}{i} = 2R$

L'exercice suivant montre comment on peut utiliser les deux méthodes sur un exemple plus complexe.

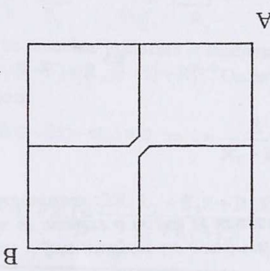


Exercice 2

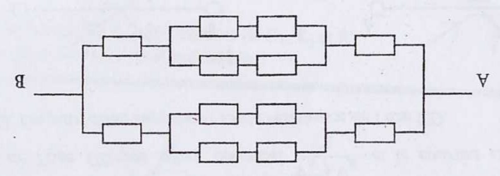
Chaque branche du réseau suivant a une résistance r. Quelle est la résistance équivalente entre les sommets A et B ?

Utilisons les deux méthodes vues dans la remarque de l'exercice précédent :

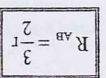
1) Passage au montage des résistances équivalentes



L'axe AB étant un axe de symétrie, les courants se répartissent symétriquement de part et d'autre de cet axe. Il en résulte que l'on peut déconnecter les fils au centre. Le montage équivaut alors à :



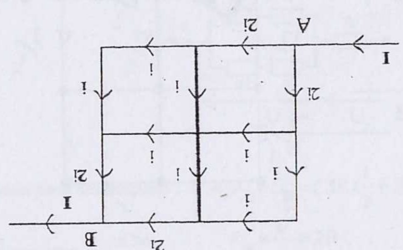
Chaque branche valant 3r, la résistance R_{AB} vaut :



$$\boxed{R_{AB} = \dfrac{3}{2}r}$$

2) Etude de la répartition des intensités

Cette méthode consiste à étudier la répartition des intensités et à identifier la formule $U_{AB} = R_{AB}I$ avec celle obtenue en calculant U_{AB} le long d'un parcours sur le réseau. Ici, la répartition des intensités est la suivante :



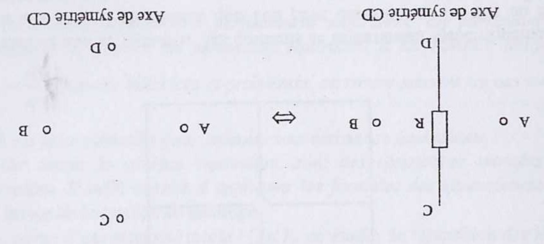
On en déduit sur un parcours extérieur $U_{AB} = 2ri + ri + ri + 2ri = 6ri$. Comme $I = 4i$, on en tire $U_{AB} = \frac{3}{2}rI = R_{AB}I$ d'où :

$$\boxed{R_{AB} = \frac{3}{2}r}$$

Remarque

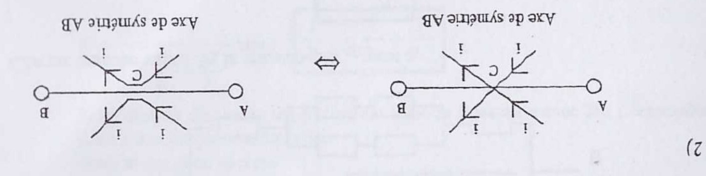
Dans ce genre d'exercice, il faut analyser les symétries et leurs conséquences sur la répartition des intensités, de manière à ne pas se lancer dans des calculs trop lourds. Les principaux cas sont les suivants :

1)



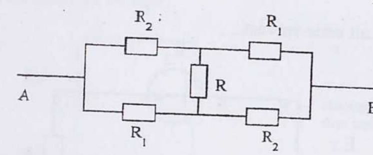
Les points de l'axe CD ont même potentiel $\frac{V_A + V_B}{2}$ et le courant est nul dans la branche CD. On peut donc supprimer toute résistance de l'axe CD.

2)



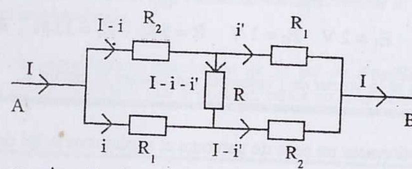
Les courants sont symétriques de part et d'autre de l'axe AB. Si un nœud C appartient à l'axe, tout se passe comme s'il n'existait pas.

Exercice 3



1) Exprimer la résistance R_{AB} en fonction de R_1, R_2 et R.
2) Le résultat pour $R_1 = R_2$ était-il prévisible ?

1)



Le calcul de U_{AB} en suivant les branches inférieure et supérieure donne :

$U_{AB} = R_1 i + R_2(I - i') = R_2(I - i) + R_1 i'$. On en déduit i = i'.

La maille intérieure donne alors :

$$R_2(I - i) + R(I - 2i) - R_1 i = 0 \Rightarrow i = \frac{R + R_2}{R_1 + R_2 + 2R} I$$

D'autre part :

$$U_{AB} = R_2(I - i) + R_1 i = \frac{2R_1R_2 + R_1R + R_2R}{R_1 + R_2 + 2R} I = R_{AB} I$$

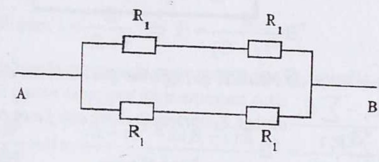
D'où :

$$\boxed{R_{AB} = \frac{2R_1R_2 + R_1R + R_2R}{R_1 + R_2 + 2R}}$$

2) Si $R_1 = R_2$, la formule donne :

$$\boxed{R_{AB} = R_1 = R_2}$$

Le résultat était prévisible sans calcul car le montage devient symétrique et la résistance R ne joue aucun rôle car elle n'est parcourue par aucun courant. Nous avons alors en la déconnectant :

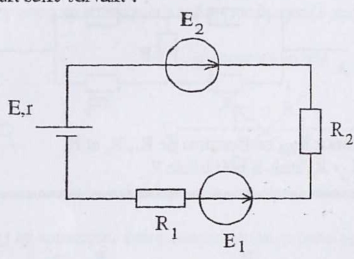


D'où :

$$\boxed{R_{AB} = R_1}$$

Exercice 4

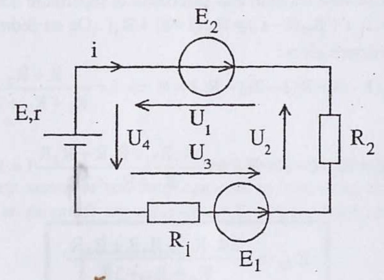
On considère le circuit série suivant :



E = 3 V E_1 = 2 V E_2 = 1 V   r = 5 Ω R_1 = 15 Ω R_2 = 60 Ω

Déterminer le sens et la valeur de l'intensité parcourant le circuit i.

Choisissons arbitrairement un sens de parcours et appliquons la loi des mailles :



Nous pouvons écrire :

$$\sum U = U_1 + U_2 + U_3 + U_4 = 0$$

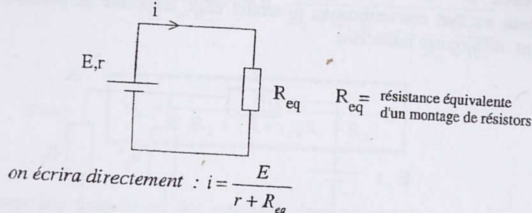
soit : $-E_2 + R_2 i + E_1 + R_1 i - E + ri = 0$

$$\Rightarrow \quad \boxed{i = \frac{E + E_2 - E_1}{r + R_1 + R_2} = 50\text{mA}}$$

Remarques

1) Cet exercice illustre la loi de Pouillet qui affirme que dans un circuit série, l'intensité est telle que $i = \dfrac{\sum E_i - \sum E_k}{\sum R_i}$ *où les E_i correspondent aux f.e.m orientées dans le sens de parcours et les E_k à celles orientées en sens inverse.*

Cette relation est fondamentale pour calculer très rapidement des intensités dans un montage série et sera utilisée dans les exercices suivants. Ainsi, dans tous les exercices où l'on rencontrera un montage du type :



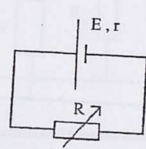
on écrira directement : $i = \dfrac{E}{r + R_{eq}}$

Notons que l'application de la loi de Pouillet donne directement le résultat de l'exercice sans aucun calcul intermédiaire.

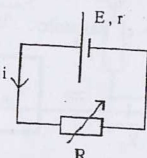
2) Dans le cas où l'application numérique de la loi de Pouillet donne une valeur négative, cela signifie simplement que le courant passe en sens inverse.

Exercice 5

Un générateur de force électromotrice E et de résistance interne r alimente une résistance R variable.



Déterminer la valeur de R pour laquelle la puissance consommée par la résistance variable est maximale.



Nous avons $P = Ri^2$ avec $i = \dfrac{E}{R + r} \Rightarrow P = \dfrac{R}{(R + r)^2}E^2$

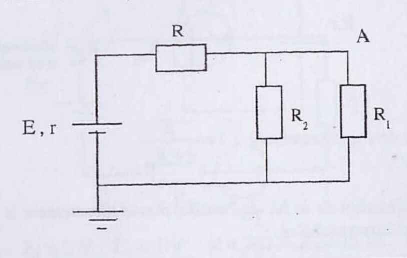
On peut s'apercevoir que la puissance consommée par R est nulle dans les cas extrêmes $R = 0$ ou $R = +\infty$. P passe donc par un maximum pour :

$$\frac{dP}{dR} = 0 = \frac{(R + r)^2 - 2(R + r)R}{(R + r)^4}E^2 = \frac{r - R}{(R + r)^3}E^2$$

La puissance sera donc maximale pour : $\boxed{R = r}$

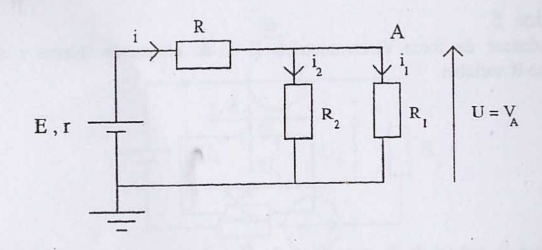
Exercice 6

La masse est par convention au potentiel zéro. Exprimer le potentiel du point A en utilisant différentes méthodes.



Méthode 1 : utilisation des lois de Kirchhoff

Soit i le courant débité par le générateur, i_1 le courant traversant R_1, i_2 le courant traversant R_2.



Nous avons : $V_A = R_1 i_1 = R_2 i_2 = E - (R+r)i$ avec $i = i_1 + i_2$

On en déduit $i_1 = \frac{V_A}{R_1}$, $i_2 = \frac{V_A}{R_2}$ et par suite : $V_A = E - (R+r)(\frac{1}{R_1}+\frac{1}{R_2})V_A$

D'où : $V_A = \frac{E}{1+(R+r)(\frac{1}{R_1}+\frac{1}{R_2})} \Rightarrow \boxed{V_A = \frac{R_1R_2}{R_1R_2+(R+r)(R_1+R_2)}E}$

Méthode 2 : technique du diviseur de tension

Les deux résistances en parallèle sont équivalentes à une résistance $R_{eq} = \frac{R_1R_2}{R_1+R_2}$.

Nous avons alors un simple diviseur de tension et :

$$V_A = \frac{R_{eq}}{R+r+R_{eq}}E \Rightarrow \boxed{V_A = \frac{R_1R_2}{R_1R_2+(R+r)(R_1+R_2)}E}$$

Méthode 3 : technique du diviseur de courant

$$V_A = R_1 i_1 = R_1\left(\frac{R_2}{R_1+R_2}i\right) = R_1\frac{R_2}{R_1+R_2}\,\frac{E}{R+r+\frac{R_1R_2}{R_1+R_2}}$$

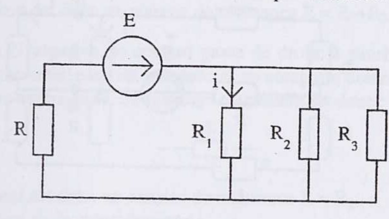
d'où : $\boxed{V_A = \frac{R_1R_2}{R_1R_2+(R+r)(R_1+R_2)}E}$

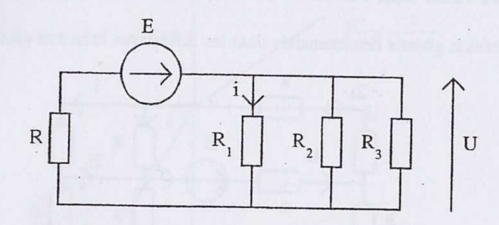
Remarque

Pour déterminer des tensions ou des intensités dans un circuit, on peut voir, sur cet exercice, l'intérêt qu'il y a à utiliser la technique du diviseur de tension ou de courant plutôt que les lois de Kirchhoff.

Exercice 7

Déterminer dans ce montage l'intensité i du courant parcourant la résistance R_1.





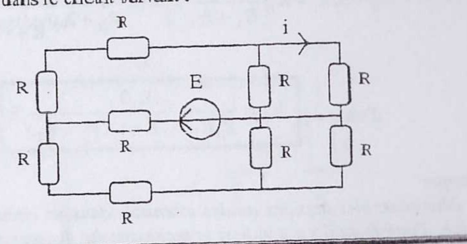
On reconnaît un diviseur de tension et :

$$i = \frac{U}{R_1} = \frac{1}{R_1}\,\frac{R_{eq}}{R+R_{eq}}E \quad \text{avec} \quad \frac{1}{R_{eq}} = \frac{1}{R_1}+\frac{1}{R_2}+\frac{1}{R_3}$$

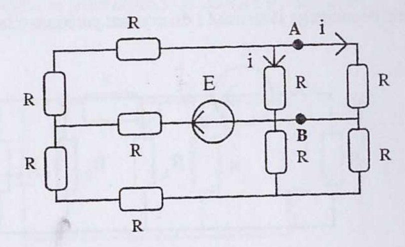
D'où : $i = \frac{1}{R_1}\,\frac{1}{1+\frac{R}{R_{eq}}}E \Rightarrow \boxed{i = \frac{1}{1+R(\frac{1}{R_1}+\frac{1}{R_2}+\frac{1}{R_3})}\,\frac{E}{R_1}}$

Exercice 8

Calculer la valeur de i dans le circuit suivant :

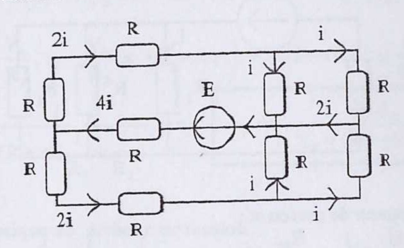


L'égalité des tensions U_{AB} aux bornes des deux résistors de la branche supérieure montés en parallèle entre A et B implique que l'intensité traversant le deuxième résistor vaut i.



Le montage étant symétrique, les intensités dans les deux résistors de la branche inférieure valent aussi i et on en déduit que l'intensité totale traversant le générateur vaut 4i.

La répartition globale des intensités dans les différentes branches est donc :



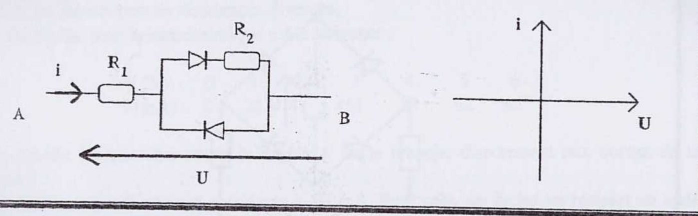
L'étude d'une maille contenant le générateur permet d'obtenir E = 9 Ri.

D'où :

$$\boxed{i = \frac{E}{9R}}$$

Exercice 9

Sachant que les diodes sont idéales, tracer l'allure de la caractéristique i = f(U) du dipôle AB suivant.



Pour une tension U positive, le courant passe de gauche à droite. En conséquence, la diode de la branche inférieure est bloquée et celle de la branche supérieure est passante et se comporte comme un fil. Le montage équivalent est donc :

A —[R_1]—[R_2]— B

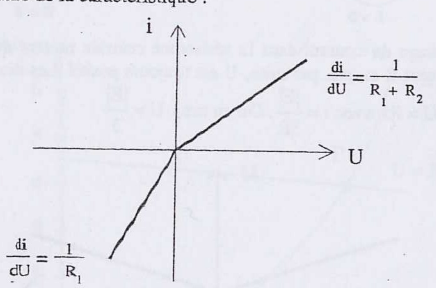
Le dipôle équivalent est donc un résistor de résistance $R = R_1 + R_2$.

Pour une tension U négative, le courant passe de droite à gauche. En conséquence, la diode de la branche inférieure est passante et se comporte comme un fil, et celle de la branche supérieure est bloquée. Le montage équivalent est donc :

A —[R_1]— B

Le dipôle équivalent est donc un résistor de résistance $R = R_1$.

On en déduit l'allure de la caractéristique :



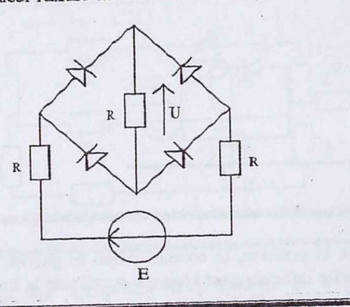
Remarque

Pour analyser un circuit comportant des diodes idéales, il suffit de choisir un sens du courant parcourant le dipôle et d'en déduire si les diodes sont bloquées où passantes (elles se comportent alors comme des fils et court-circuitent une éventuelle branche en dérivation).

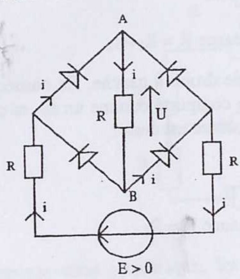
Notons que les diodes réelles ne se comportent pas exactement comme des fils dans le sens passant, mais possèdent une faible tension de l'ordre de 0,6 V. Le modèle de la diode idéale néglige cette tension.

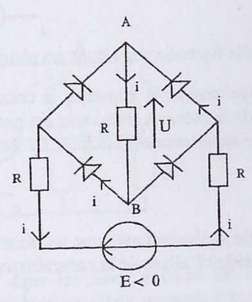
Exercice 10

Les diodes étant idéales, tracer l'allure de la courbe U = f (E).



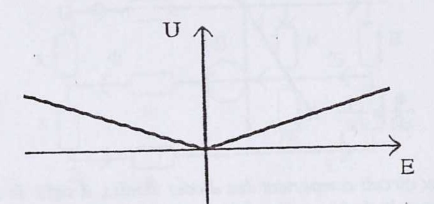
Analysons les deux cas E > 0 et E < 0.





L'étude du passage du courant dans la résistance centrale montre que celui-ci descend toujours de A vers B et que, par suite, U est toujours positif. Les diodes étant idéales, il en résulte que U = Ri avec $i = \frac{|E|}{3R}$. On en tire : $U = \frac{|E|}{3}$

D'où le graphe :



Remarque

Ce montage sert à redresser des tensions et s'appelle "pont de diodes". Il est en particulier utilisé dans les transformateurs dont le but est de transformer une tension sinusoïdale (en général le secteur) en une tension continue.

Exercice 11

On possède :

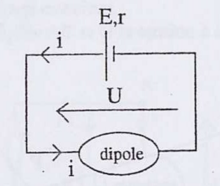
- Une pile de 4,5 V et de résistance interne 10 Ω.
- Un lot de résistors de résistances diverses.
- Un dipôle dont la caractéristique est la suivante :

U (V) :	0	1	2	3	4	5	6
I (mA) :	0	28	41	51	58	62	65

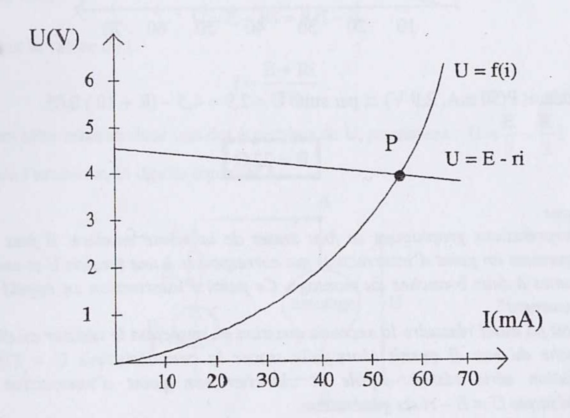
1) Quelle intensité traversera le dipôle si on le branche directement aux bornes de la pile ?

2) On veut que l'intensité soit égale à 50 mA. Pour cela, on inclut un résistor en série dans le montage. Quelle doit être la valeur de sa résistance ?

1) Le montage est le suivant :



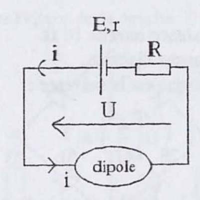
Les tensions aux bornes des deux dipôles sont égales et l'intensité débitée par le générateur correspond à l'intensité qui parcourt le dipôle. Il en résulte qu'en traçant sur un même graphe les caractéristiques des deux dipôles, U = E - ri pour le générateur et U = f(i) pour le dipôle, le point d'intersection donne le point de fonctionnement P et par suite i.



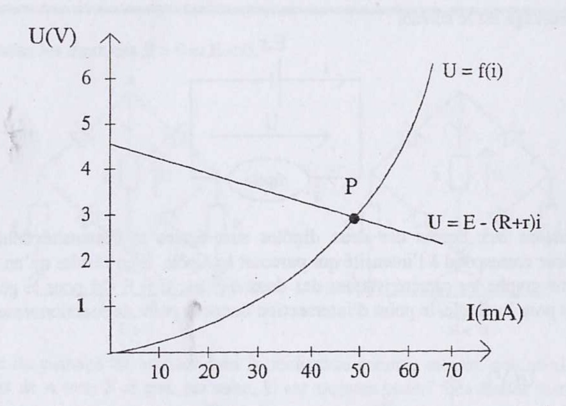
Graphiquement, on obtient :

i = 58 mA

2) Représentons le montage en mettant le résistor R en série avec le générateur.



Nous sommes alors revenus au problème précédent mais avec une caractéristique de la branche du générateur du type : $U = E - (R+r)\,i$.
Si l'on veut que l'intensité soit égale à 50 mA, le point de fonctionnement P est donné par le graphe suivant :

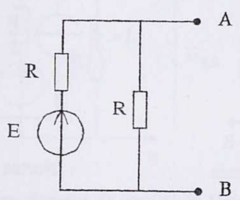


On en déduit P(50 mA, 2,9 V) et par suite $U = 2{,}9 = 4{,}5 - (R + 10)\ 0{,}05$.
D'où :

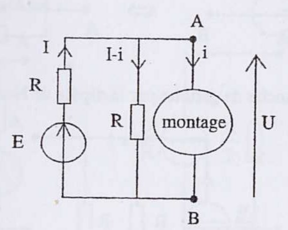
$$\boxed{R = 22\,\Omega}$$

Remarque
Les interprétations graphiques se font toutes de la même manière. Il faut chercher graphiquement un point d'intersection qui corresponde à une tension U et une intensité i communes à deux branches du montage. Ce point d'intersection est appelé "point de fonctionnement".
On aurait pu aussi résoudre la seconde question en associant le résistor au dipôle dans la branche du bas. Il aurait alors fallu tracer la caractéristique $U = f(i) + Ri$ de l'association série résistor-dipôle et chercher son point d'intersection avec la caractéristique $U = E - ri$ du générateur.

Exercice 12
Trouver par plusieurs méthodes différentes les modèles de Thévenin et Norton équivalents au dipôle AB.



1) Méthode classique
Calculons le modèle de Thévenin en étudiant comment le dipôle AB se comporterait s'il débitait un courant dans un montage extérieur.
Soit i l'intensité débitée par le dipôle AB et U la tension à ses bornes. On obtient ainsi le montage suivant :



Nous avons alors :

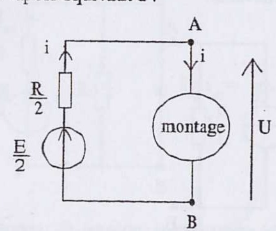
$$U = E - RI = R(I - i)$$

On en déduit la valeur de I :

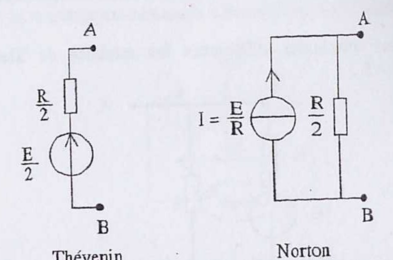
$$I = \frac{E + Ri}{2R}$$

En injectant cette relation dans une des équations de U, on obtient : $U = \frac{E}{2} - \frac{R}{2}i$

Ainsi, vu de l'extérieur, le dipôle équivaut à :

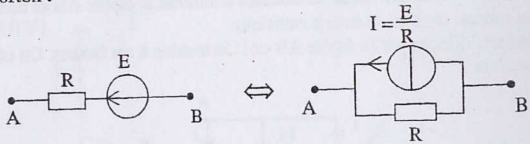


Concrètement, cela signifie que les générateurs de Thévenin et Norton équivalents au dipôle AB sont :

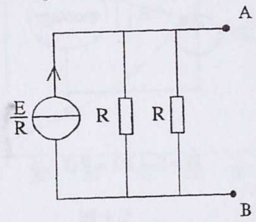


2) Utilisation de l'équivalence Thévenin - Norton

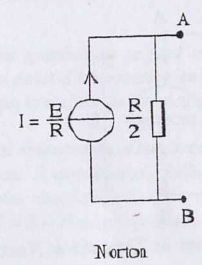
Pour trouver le dipôle équivalent, utilisons l'équivalence entre le modèle de Thévenin et celui de Norton :

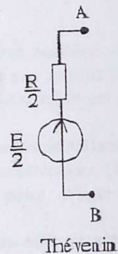


Si l'on transforme la branche de gauche par le dipôle de Norton équivalent, on obtient :

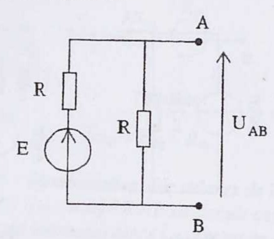


Comme les deux résistances R en dérivation équivalent à une résistance unique $R_{eq} = \frac{R}{2}$, on obtient directement le dipôle de Norton équivalent au dipôle AB. On en déduit par suite celui de Thévenin.





3) Utilisation du théorème de Thévenin

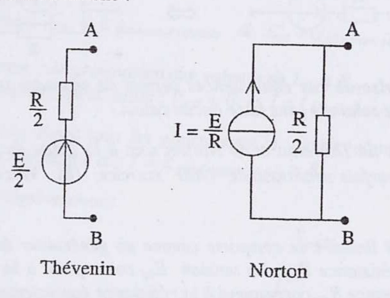


En circuit ouvert, on reconnaît un diviseur de tension de facteur $\frac{R}{2R} = \frac{1}{2}$ entre A et B.

On en déduit : $U_{AB} = E_{eq} = \frac{E}{2}$.

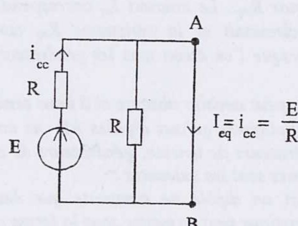
D'autre part, si l'on éteint le générateur de tension en le remplaçant par un fil, le montage équivaut à deux résistors R montés en dérivation d'où : $R_{eq} = \frac{R}{2}$.

Les modèles équivalents sont donc :



4) Utilisation du théorème de Norton

Court-circuitons le dipôle AB. Nous avons alors $U_{AB} = 0 = E - R\, i_{cc}$ d'où $I_{eq} = i_{cc} = \frac{E}{R}$.



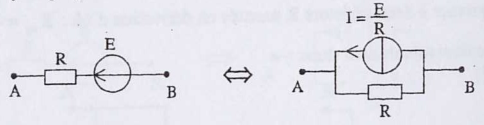
Comme en éteignant le générateur de tension, la résistance équivalente vaut $R_{eq} = \frac{R}{2}$, on en déduit les modèles :

Norton Thévenin

Remarques

1) L'intérêt de trouver un modèle de Thévenin où de Norton équivalent à un montage vient du fait qu'il permet de calculer plus facilement un courant ou une tension dans un montage compliqué (voir exercice 15).

Dans ce but, il faut parfaitement connaître les équivalences Thévenin – Norton :



Une bonne maîtrise de ces équivalences permet de résoudre immédiatement certains exercices (comme celui-ci) sans faire aucun calcul.

2) Les théorèmes de Thévenin et de Norton sont à la limite du programme, mais leur utilisation est parfois intéressante (voir exercice 18). Voici les énoncés de ces théorèmes :

Thévenin

« Tout dipôle AB linéaire se comporte comme un générateur de tension E_{eq} monté en série avec une résistance R_{eq}. La tension E_{eq} correspond à la tension U_{AB} en circuit ouvert et la résistance R_{eq} correspond à la résistance équivalente du dipôle lorsque l'on éteint tous les générateurs de tension et d'intensité du dipôle ».

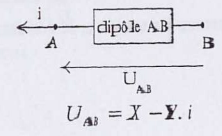
Norton

« Tout dipôle AB linéaire se comporte comme un générateur de courant I_{eq} monté en dérivation avec un résistor R_{eq}. Le courant I_{eq} correspond au courant débité par le dipôle si on le court-circuitait et la résistance R_{eq} correspond à la résistance équivalente du dipôle lorsque l'on éteint tous les générateurs de tension et d'intensité du dipôle ».

La lecture de ces énoncés peut sembler obscure et il nous semble utile de les expliciter.

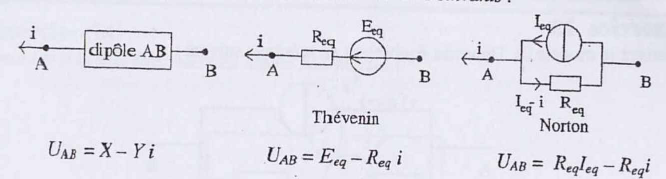
Tout d'abord, ils ne s'appliquent qu'aux dipôles AB ne comportant que des dipôles linéaires (résistors, générateurs de tension, générateurs de courant). Ensuite les idées utilisées dans ces théorèmes sont les suivantes :

On peut montrer que si un dipôle ne comporte que des dipôles linéaires, alors l'équation de sa caractéristique peut se mettre sous la forme :



$$U_{AB} = X - Y.i$$

Nous avons alors équivalence entre les trois modèles suivants :



$U_{AB} = X - Y\,i$ $\qquad U_{AB} = E_{eq} - R_{eq}\,i$ $\qquad U_{AB} = R_{eq}I_{eq} - R_{eq}i$

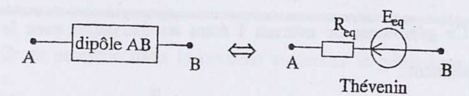
Théorème de Thévenin : détermination des valeurs de E_{eq} et R_{eq}.

Si l'on mesure la tension U_{AB} du dipôle AB en circuit ouvert (c'est-à-dire si le dipôle AB n'est pas branché dans un montage) alors i = 0 et on en déduit :

$$X = U_{AB\ circuit\ ouvert} = E_{eq}$$

D'autre part, si l'on éteint tous les générateurs du dipôle, alors celui-ci se comporte comme une simple résistance et : $Y = R_{générateurs\ éteints} = R_{eq}$

Nous avons donc l'équivalence :



avec $R_{eq} = R_{générateurs\ éteints}$ et $E_{eq} = U_{AB\ circuit\ ouvert}$

Théorème de Norton : détermination des valeurs de I_{eq} et R_{eq}.

Si l'on court-circuite le dipôle, alors : $U_{AB} = 0$ et $i = i_{court\ circuit} = I_{eq}$.

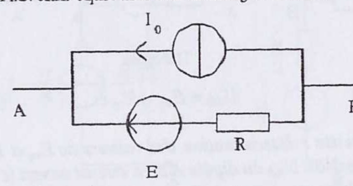
D'autre part, si l'on éteint tous les générateurs du dipôle, alors celui-ci se comporte comme une simple résistance et : $Y = R_{générateurs\ éteints} = R_{eq}$.

Nous avons donc l'équivalence :

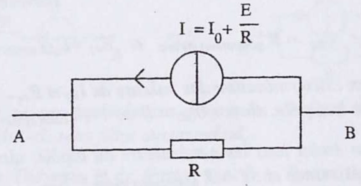
I_{eq}

Exercice 13

Donner le modèle de Thévenin équivalent au montage suivant :

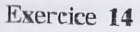


En remplaçant le générateur de tension par le modèle de Norton équivalent, on obtient deux générateurs de courant I_0 et $\frac{E}{R}$ en dérivation qui équivalent à un générateur unique $I = I_0 + \frac{E}{R}$. Ce générateur de courant I étant en dérivation avec le résistor R nous obtenons finalement :



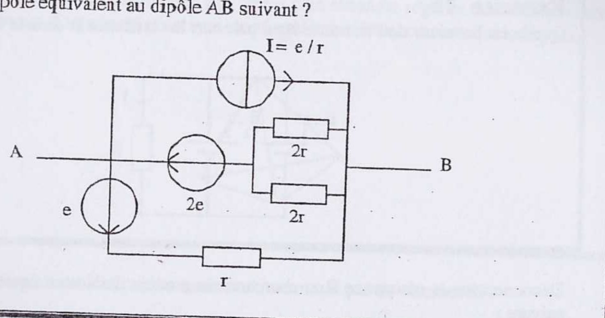
D'où le modèle de Thévenin équivalent :

$E_T = E + RI$

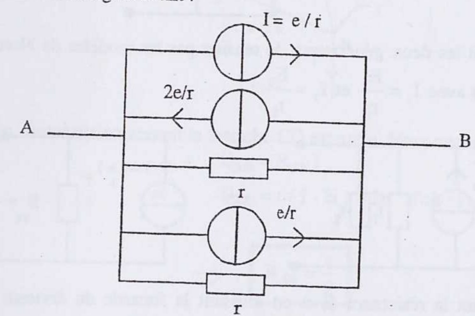


Exercice 14

Quel est le dipôle équivalent au dipôle AB suivant ?



Les résistances 2r en parallèle dans la branche contenant le générateur 2e équivalent à une résistance r.
Remplaçons les branches contenant les générateurs de tension par les générateurs de courant équivalents.
On obtient ainsi le montage suivant :



Les trois générateurs de courant équivalent à un générateur unique de courant :

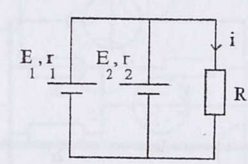
$$I = -\frac{e}{r} + 2\frac{e}{r} - \frac{e}{r} = 0$$

D'autre part, comme la résistance équivalente vaut $R = \frac{r}{2}$, on en déduit que le dipôle AB est simplement équivalent à un résistor de résistance :

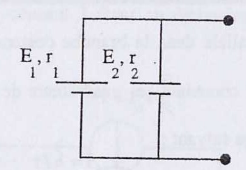
$$\boxed{R = \frac{r}{2}}$$

Exercice 15

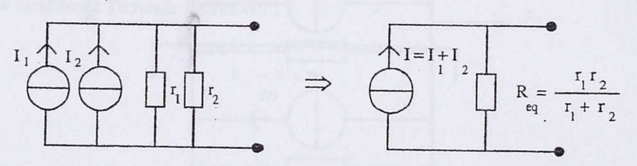
Quelle est la valeur de l'intensité i qui parcourt la résistance R dans le montage ?



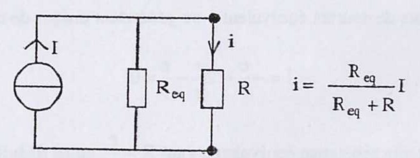
Déconnectons la résistance R et cherchons le modèle de Norton équivalent au montage suivant :



En remplaçant les deux générateurs de tension par les modèles de Norton équivalents, nous obtenons avec $I_1 = \dfrac{E_1}{r_1}$ et $I_2 = \dfrac{E_2}{r_2}$:



En rebranchant la résistance R et en utilisant la formule du diviseur de courant, on obtient finalement :



$$i = \frac{R_{eq}}{R_{eq} + R} I$$

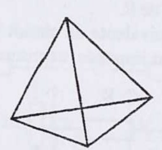
$$\boxed{i = \frac{r_1 E_2 + r_2 E_1}{r_1 r_2 + R(r_1 + r_2)}}$$

Remarque

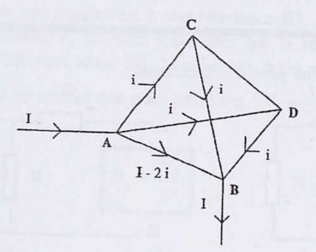
Nous invitons le lecteur à résoudre cet exercice en utilisant d'autres méthodes comme dans l'exercice 13.

Exercice 16 ENAC

Un réseau de conducteurs ohmiques a la forme d'un tétraèdre régulier dont chaque arête a une résistance r. Calculer la résistance du réseau entre deux sommets quelconques.



Notons I l'intensité arrivant par un sommet A et sortant par un sommet B.



Par symétrie, l'intensité traversant la branche CD est nulle. Nous avons alors :

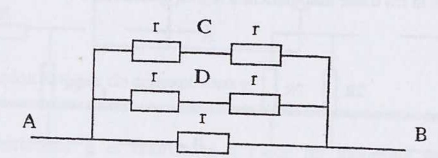
$$U_{AB} = R_{AB} I$$

et $\quad U_{AB} = r(I - 2i) = 2ri \quad$ d'où : $i = \dfrac{I}{4}$ et $U_{AB} = \dfrac{r}{2} I$

$$\Rightarrow \quad \boxed{R_{AB} = \frac{r}{2}}$$

Remarque

On peut aussi décomposer le réseau en utilisant le fait qu'il n'y a pas de courant dans la branche CD. Le réseau équivaut alors au montage :



Le résultat est alors immédiat : $\dfrac{1}{R_{AB}} = \dfrac{1}{r} + \dfrac{1}{2r} + \dfrac{1}{2r} \quad \Rightarrow \quad R_{AB} = \dfrac{r}{2}$

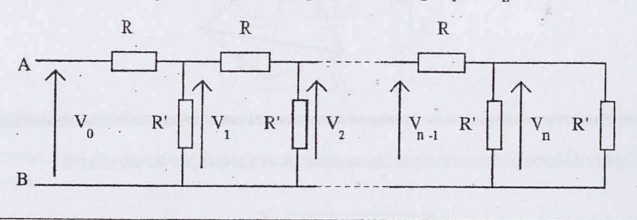
Exercice 17 **Mines AADN**

On donne à R' une valeur telle que la résistance équivalente du circuit (vu de AB) ait la même valeur pour n = 1 et n = 2.

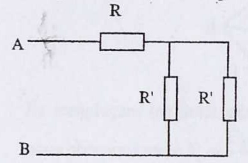
1) Déterminer R' en fonction de R.

2) Quelle est la résistance équivalente du circuit lorsque n = 100 ?

3) La tension d'entrée V_o étant imposée, exprimer les d.d.p V_1, ...,V_n en fonction de V_o.



1) Représentons les deux premiers montages :



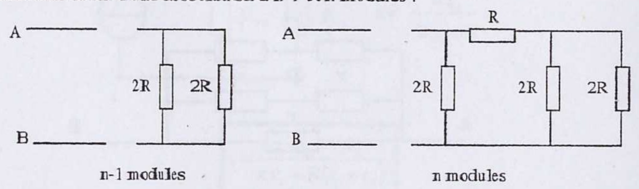
$$R_{AB} = R_1 = R + \frac{1}{2}R' \qquad R_{AB} = R_2 = R + \frac{(R+\frac{1}{2}R')R'}{\frac{3}{2}R'+R}$$

Par identification, il vient : $\frac{1}{2} = \frac{R+\frac{1}{2}R'}{\frac{3}{2}R'+R} \Rightarrow R+\frac{1}{2}R' = \frac{3}{4}R'+\frac{1}{2}R$

D'où :

$$\boxed{R' = 2R}$$

2) Considérons la fin d'une association à n-1 et n modules :



La résistance finale du module n-1 vaut R tandis que celle du module n vaut aussi R. Il en résulte que $R_{n-1} = R_n$

Comme $R_1 = R + \frac{1}{2}R' = 2R$, on en déduit que pour tout n :

$\boxed{R_n = 2R}$ (et donc $R_{100} = 2R$)

3)

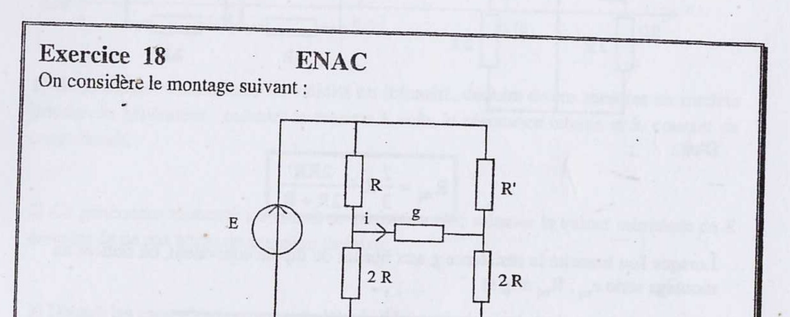
On peut voir immédiatement que $V_n = \frac{1}{2}V_{n-1}$ (diviseur de tension avec les deux résistances 2R en parallèle qui équivalent à une résistance R). Lorsque l'on se déplace vers la gauche sur une tension V_i, on peut remarquer que la résistance équivalente en parallèle sur la droite de 2R vaut aussi 2R. Nous avons donc aussi entre V_i et V_{i-1} un diviseur de facteur 1/2 et il en résulte que pour tout i < n : $V_i = \frac{1}{2}V_{i-1}$.

D'où :

$$\boxed{V_n = \frac{V_0}{2^n}}$$

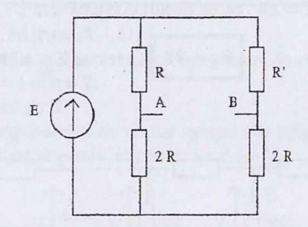
Exercice 18 **ENAC**

On considère le montage suivant :



Déterminer l'expression littérale du courant dans g.

Déconnectons la résistance g et cherchons à l'aide du théorème de Thévenin le générateur de tension équivalent au dipôle AB obtenu :



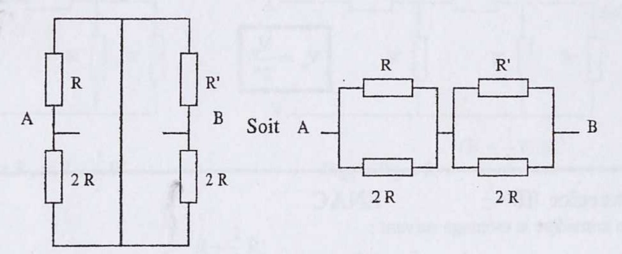
Les potentiels V_A et V_B se calculent en utilisant de part et d'autre les diviseurs de tension .

$$V_A = \frac{2R}{2R+R}E = \frac{2}{3}E \qquad V_B = \frac{2R}{2R+R'}E$$

D'où :

$$E_{eq} = V_A - V_B = \left(\frac{2}{3} - \frac{2R}{2R+R'}\right)E = \frac{2(R'-R)}{3(2R+R')}E$$

En remplaçant le générateur par un fil, le montage des résistances est le suivant :



D'où :

$$R_{eq} = \frac{2}{3}R + \frac{2RR'}{2R+R'}$$

Lorsque l'on branche la résistance g aux bornes du dipôle équivalent, on obtient un montage série e_{eq} , R_{eq} et g et :

$$i = \frac{E_{eq}}{R_{eq}+g} = \frac{2}{3}\frac{R'-R}{(2R+R')(g+\frac{2}{3}R)+2RR'}E$$

Remarque

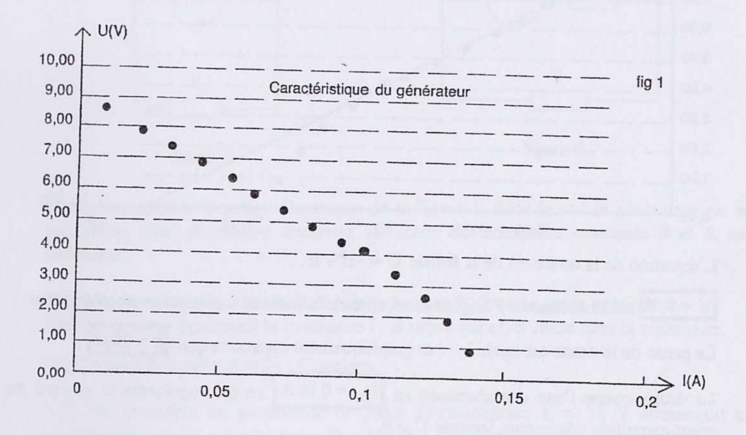
Vu la lourdeur du résultat, il est bon de tester sa validité dans un cas où le résultat est évident. Ici, on peut voir sur le schéma de montage que pour R' = R le pont est symétrique de part et d'autre de g et que, par suite, i doit être nulle. La formule est bien en accord avec ce phénomène.

Problème n°1

d'après Mines d'Albi, Alès, Douai, Nantes

Connaissances requises : modélisation linéaire d'un dipôle actif ; représentation de Thévenin et de Norton.

On se place en régime continu. En faisant débiter le générateur dans des résistances réglables, on a obtenu le graphe de la figure 1.



1) En précisant son domaine de validité en intensité, déduire de ces mesures un modèle linéaire du générateur : calculer la tension à vide, la résistance interne et le courant de court-circuit.

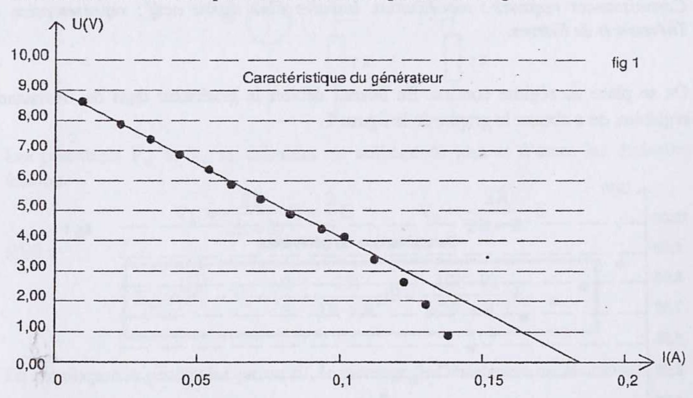
2) Ce générateur alimente un circuit de résistance R ; calculer la valeur minimale de R assurant de ne pas sortir du domaine linéaire.

3) Donner les caractéristiques du modèle de Thévenin équivalent de ce générateur ; faire un schéma.

4) Donner les caractéristiques du modèle de Norton équivalent de ce générateur ; faire un schéma.

Corrigé

1) Pour les courants tels que $0 \le I \le 0{,}12\,A$ les points sont alignés.



L'équation de la droite est de la forme $U = -rI + E$.

$\boxed{E = 9\,V}$ est l'ordonnée à l'origine et représente la force électromotrice du générateur.

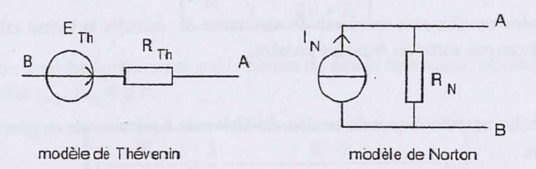
La pente de la droite est égale à – r et graphiquement on trouve que $\boxed{r = 50\,\Omega}$

La droite coupe l'axe des abscisses en $\boxed{I_{CC} = 0{,}18\,A}$ ce qui représente le courant de court-circuit du générateur, lorsque U = 0.

2) Aux bornes de la résistance R on aura $U = RI$ et $U = -50I + 9$ avec $I \le 0{,}12\,A$.

On en déduit : $I = \dfrac{9}{R+50} \le 0{,}12 \Rightarrow 25 \le R$. La valeur minimale de R est de $\boxed{25\,\Omega}$

3 et 4)



$\boxed{E_{Th} = E = 9\,V}$; c'est la f.é.m ou la tension à vide du générateur linéarisé.

$\boxed{R_{Th} = R_N = r = 50\,\Omega}$; c'est la résistance interne du générateur linéarisé.

$\boxed{I_N = I_{CC} = 0{,}18\,A}$; c'est le courant de court-circuit du générateur linéarisé.

Problème n°2

d'après Banque Agro

Connaissances requises : puissance électrocinétique reçue par un dipôle ; générateur de tension (modèle de Thévenin).

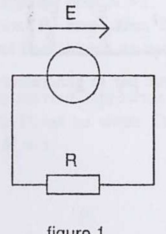


figure 1

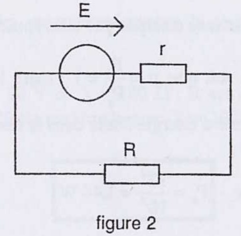


figure 2

1) On considère le montage électrique de la figure 1, dans lequel le générateur est un générateur idéal de tension continue, de force électromotrice constante E et R une résistance.

1.a) Déterminer en fonction de E et R la puissance P_g fournie par le générateur.
1.b) Déterminer également la puissance P_J dissipée par effet Joule dans la résistance.

1.c) Evaluer le rapport $\rho = \dfrac{P_J}{P_g}$. Conclure.

1.d) On considère un générateur de force électromotrice E = 12 V alimentant un montage électronique de résistance $R = 10^2\ \Omega$.
Déterminer numériquement P_g.

2) Dans une modélisation plus réaliste, il faut prendre en compte la résistance interne r (faible, mais non nulle) du générateur de tension continue. On considère donc le montage de la figure 2.

2.a) Déterminer en fonction de E, r et R la puissance totale P_g fournie par le générateur, c'est-à-dire globalement dissipée par effet Joule dans la résistance R et la résistance r.
2.b) Déterminer également la puissance P_J dissipée par effet Joule dans la résistance de charge R.

2.c) Evaluer le rapport $\rho = \dfrac{P_J}{P_g}$. Conclure. Si l'on a le choix de la valeur de la résistance de charge R, pour E et r fixés, c'est-à-dire pour un générateur donné, comment a-t-on intérêt à choisir R pour optimiser le rendement en puissance ρ ?
2.d) Déterminer également la valeur de R, pour E et r fixés, permettant d'obtenir la valeur maximale de P_J.

2.e) Représenter $P_J(R)$. Y a-t-il contradiction entre les deux résultats précédents ? Commenter.

Corrigé

1.a) Puissance fournie par le générateur : $P_g = EI = E\frac{E}{R} = \frac{E^2}{R}$.

1.b) Puissance dissipée par effet Joule dans R : $P_J = RI^2 = R\frac{E^2}{R^2} = \frac{E^2}{R}$

1.c) On voit que $\rho = \frac{P_J}{P_g} = 1$; toute la puissance fournie par le générateur est dissipée sous forme d'énergie Joule dans la résistance.

1.d) A.N. : $P_g = \frac{12^2}{10^2} = 1{,}44\ W$

2.a) L'intensité dans le circuit est donnée par : $I = \frac{E}{R+r}$.

La puissance fournie par le générateur est $P_g = EI = \frac{E^2}{R+r}$

2.b) La puissance dissipée dans la résistance de charge est $P_J = RI^2 = R\frac{E^2}{(R+r)^2}$

2.c) Le rendement sera égal à $\rho = \frac{P_J}{P_g} = \frac{R}{R+r}$

Pour optimiser le rendement il faut choisir R grande devant r ; alors ρ tendra vers 1. La puissance dissipée dans la résistance r du générateur sera alors négligeable par rapport à celle dissipée dans la résistance extérieure R.

2.d) La puissance P_J sera maximale, lorsque sa dérivée par rapport à R sera nulle.

$$\frac{dP_J}{dR} = E^2\left(\frac{(R+r)^2 - 2R(R+r)}{(R+r)^4}\right) = \frac{r-R}{(R+r)^3}E^2 = 0.$$

Cette dérivée est nulle si $R = r$. La puissance sera maximale et égale à $P_J = \frac{E^2}{4r}$.

2.e) Pour un générateur donné, E et r fixés, nous allons tracer la courbe de P_J en fonction de R.

On a vu que $P_J = RI^2 = R\frac{E^2}{(R+r)^2}$.

On voit que si $R \to 0$, alors $P_J \to 0$

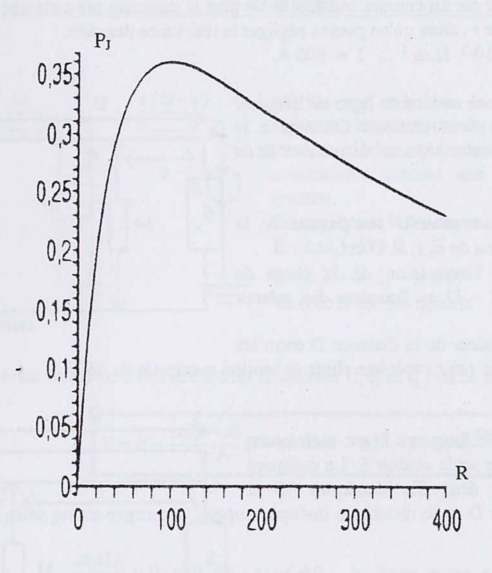
De même, si R devient très grande, alors r sera négligeable devant R et on aura :

$$P_J \approx \frac{RE^2}{R^2} = \frac{E^2}{R} \to 0.$$

La dérivée, calculée dans la question **2.d)** est $\frac{dP_J}{dR} = \frac{r-R}{(R+r)^3}E^2$; elle est positive pour $R < r$ et négative pour $R > r$.

La fonction P_J sera donc d'abord croissante, puis décroissante ; la valeur $R = r$ correspond donc bien à un maximum.

Le graphe suivant représente $P_J(R)$ pour $E = 12$ V et $r = 100\ \Omega$; R est en ohms et l'ordonnée P_J est en watts. On voit bien que P_J est maximale pour $R = 100\ \Omega$, c'est-à-dire pour $R = r$.



Rendement du montage et puissance dissipée dans R sont deux notions différentes ; lorsque $R = r$, la puissance P_J dissipée dans R sera maximale, mais le rendement sera égal à $\rho = \frac{R}{R+r} = \frac{1}{2}$; on aura donc également beaucoup d'énergie dissipée dans la résistance r du générateur.

Problème n°3

d'après Concours ENSEA

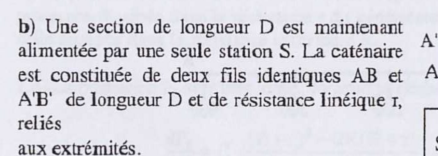
Connaissances requises : intensité du courant, différence de potentiel, loi des nœuds, loi des mailles, association des résistances.

Une locomotive électrique est alimentée en courant continu. L'alimentation est réalisée par des sous-stations S_i distantes de D. Ces sous-stations relient les rails, portés au potentiel nul, à la caténaire AB. Chaque source S sera représentée par un générateur de tension E, borne positive du côté de la caténaire.

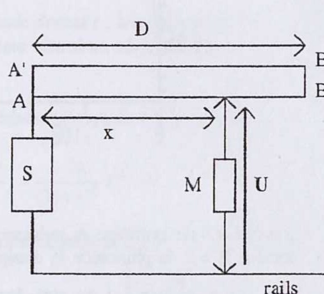
La motrice M est branchée entre les rails et la caténaire. On supposera que son moteur doit être alimenté par un courant constant I. De plus la caténaire présente une résistance linéique de valeur r , alors qu'on pourra négliger la résistance des rails.
Données : $r = 5.10^{-5}\ \Omega.m^{-1}$; $I = 800$ A.

a) On considère une section de ligne de longueur D alimentée par deux stations. On note x la longueur de caténaire séparant la motrice de la sous-station S_1.

a1) Exprimer la tension U aux bornes de la motrice en fonction de E, r, x, D et I.
a2) En déduire l'expression de la chute de tension $\Delta U = E - U$ en fonction des mêmes données.
a3) Calculer la valeur de la distance D entre les deux sous-stations pour avoir une chute de tension maximale de 45 V.

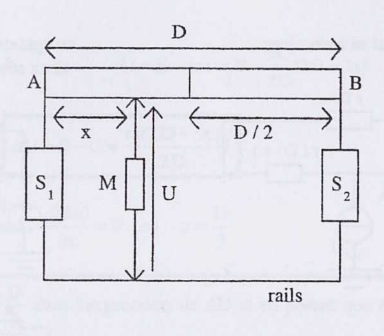


b) Une section de longueur D est maintenant alimentée par une seule station S. La caténaire est constituée de deux fils identiques AB et A'B' de longueur D et de résistance linéique r, reliés aux extrémités.

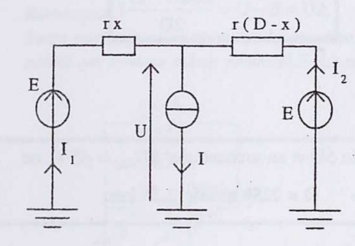


Exprimer de nouveau U et $\Delta U = E - U$ en fonction des données et calculer la valeur de la distance D à adopter pour avoir une chute de tension maximale de 45 V.

c) On revient à un système de deux stations S_1 et S_2, mais avec une caténaire à deux fils court-circuités au milieu de la ligne (voir la figure à la page suivante).
Exprimer U et ΔU en fonction des données et calculer, comme précédemment, la valeur maximale de D.
Conclusion : quel est le montage le plus avantageux ?



Corrigé



a1) On peut redessiner le circuit de la façon suivante : les sous-stations sont des sources de tension idéales et la locomotive peut être schématisée comme une source idéale de courant.
En appliquant la loi des mailles :
$E - r.xI_1 - U = 0$
$E - r.(D-x).I_2 - U = 0$
et avec la loi des noeuds : $I_1 + I_2 = I$

En résolvant ce système linéaire à trois inconnues U, I_1 et I_2, on en tire :

a2) $$U = E - \frac{rx(D-x)}{D} I \quad \text{et donc} \quad \Delta U = E - U = \frac{rx(D-x)}{D} I$$

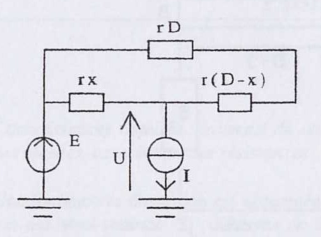
a3) ΔU passe par un extremum lorsque

$$\frac{d(\Delta U)}{dx} = 0 \quad \text{soit} \quad (D-x) - x = 0 \quad \text{et donc pour } x = \frac{D}{2}$$

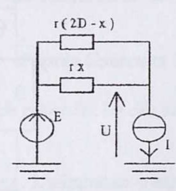
En remplaçant x par $\frac{D}{2}$ dans ΔU, on a donc $\Delta U_{max} = \frac{1}{4} rDI$

or d'après l'énoncé $\Delta U_{max} = 45$ V on en déduit $$D = \frac{4 \times 45}{r.I} = 4{,}5\ \text{km}$$

b) Le circuit peut se redessiner :



ou également en réunissant les deux résistances en série :



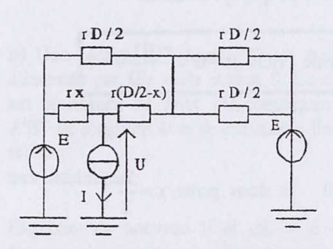
Le circuit se dessine finalement avec $R = \frac{rx(D-x)}{2D}$.

On a directement $U = E - \frac{rx(2D-x)}{2D}I$ et $\Delta U = E - U = \frac{rx(2D-x)}{2D}I$

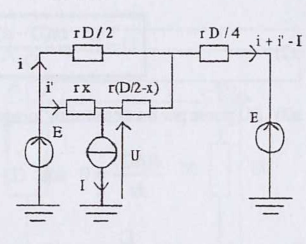
ΔU est maximum si $\frac{d(\Delta U)}{dx} = 0 \Rightarrow x = D$

> En remplaçant x par D dans l'expression de ΔU et en sachant que $\Delta U_{max} = 45$ V, on obtient : $\Delta U_{max} = 45 = \frac{rDI}{2} \Rightarrow$ **D = 2250 m soit 2,25 km.**

c) Par symétrie, il suffit d'étudier le cas $0 \le x \le D/2$.
Le schéma se redessine alors :



et encore :



En appliquant la loi des mailles :

$$r\frac{D}{2}i + r\frac{D}{4}(i+i'-I) = 0$$
$$rxi' + r(\frac{D}{2}-x)(i'-I) = r\frac{D}{2}i$$

soit

$$3Di + Di' - DI = 0$$
$$-Di + Di' - (D-2x)I = 0$$

En multipliant la deuxième équation par 3 et en additionnant membre à membre, on

obtient : $i' = \frac{2D-3x}{2D}I$ or $U = E - rxi' = E - \frac{rxI}{2D}(2D-3x)$

Donc $\Delta U = E - U = \frac{rx(2D-3x)}{2D}I$

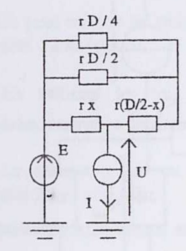
ΔU est maximum quand $\frac{d(\Delta u)}{dx} = 0 \Rightarrow x = \frac{D}{3}$

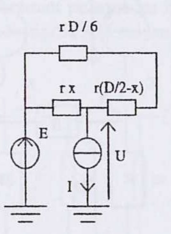
> En remplaçant x par $\frac{D}{3}$ dans l'expression de ΔU et en posant que $\Delta U_{max} = 45$ V, on obtient : $\Delta U_{max} = 45 = \frac{1}{6}rDI \Rightarrow$ **D = 6750 m = 6,75 km.**

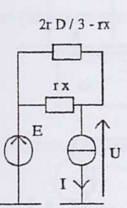
Conclusion : Le circuit de la question c) semble le plus avantageux ; c'est lui qui demande le moins de sous-stations, mais il faut deux caténaires.

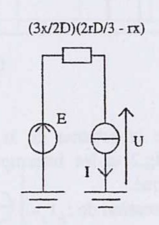
Remarque

Autre méthode pour résoudre la question ***c)*** *à condition de voir que l'on peut réunir les points qui sont au même potentiel E. Le schéma se redessine alors successivement :*









En prenant le dernier schéma, on peut écrire immédiatement :

$$E - U = \frac{3xI}{2D}(\frac{2rD}{3} - rx) = \frac{rx}{2D}(2D-3x)I$$

On retrouve ainsi le résultat de la question **c)**.

Problème n°4

d'après ESEM Orléans

Connaissances requises : générateur de courant, générateur de tension, association des résistances.

Un convertisseur numérique-analogique (C.N.A) délivre une tension U continue proportionnelle à un nombre décimal N : $0 \le N \le 15$, $U = cN$
et $N = 2^0 a_0 + 2^1 a_1 + 2^2 a_2 + 2^3 a_3$ avec $a_3 a_2 a_1 a_0$ nombre binaire correspondant à N.

Le C.N.A. comporte :
- un jeu de quatre interrupteurs (K_0, K_1, K_2, K_3)
- un réseau en échelle R – 2R
- des sources de courant I_0, chacune ayant une borne reliée à un interrupteur, l'autre à la masse. Le courant délivré sera noté $a_i I_0$, i étant l'indice correspondant à l'interrupteur K_i ($a_i = 0$ l'interrupteur K_i est ouvert ; $a_i = 1$ l'interrupteur K_i est fermé).

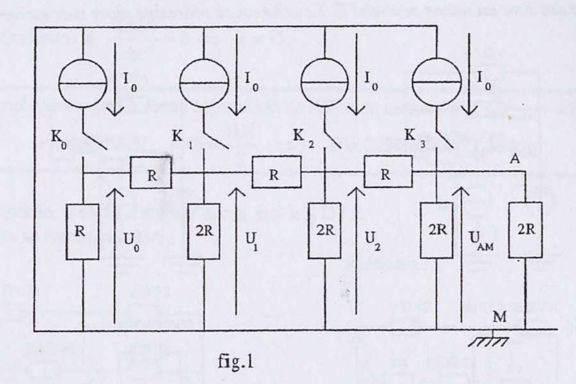


fig.1

1) Montrer que le schéma de la fig.1 est équivalent au schéma de la fig.2 si les interrupteurs K_0 , K_1 , K_2 sont ouverts et K_3 fermé.
En déduire l'expression de :

a) la résistance x en fonction de R

b) la tension U_{AM} en fonction de R, a_3 et I_0.

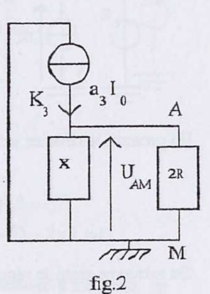


fig.2

2) Les interrupteurs K_0 , K_1 , K_3 sont ouverts et l'interrupteur K_2 est fermé.
a) Donner le schéma équivalent au montage de la fig.1.
b) En déduire l'expression de la tension U_2 en fonction de R, a_2 et I_0.
c) Etablir la relation entre U_{AM} et U_2.
d) En déduire l'expression de U_{AM} en fonction de R, a_2 et I_0.

3) De la même façon, donner :
a) l'expression de U_{AM} en fonction de R, a_1 et I_0 quand seul l'interrupteur K_1 est fermé.
b) l'expression de U_{AM} en fonction de R, a_0 et I_0 quand seul l'interrupteur K_0 est fermé.

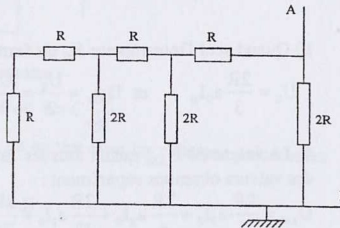
4) Montrer que U_{AM} se met sous la forme :

$$U_{AM} = \frac{RI_0(2^0 a_0 + 2^1 a_1 + 2^2 a_2 + 2^3 a_3)}{k}$$ où k est un coefficient à déterminer.

5) Quelle est la plus petite variation possible de U_{AM} pour $I_0 = 1$ mA , R = 10 kΩ ?
Donner la valeur maximale de U_{AM}. Que peut-on dire de ce système ?

Corrigé

1) On peut enlever les trois premières sources de courant puisque les interrupteurs sont ouverts. La résistance x de la fig.2 représente donc le dipôle AM suivant :

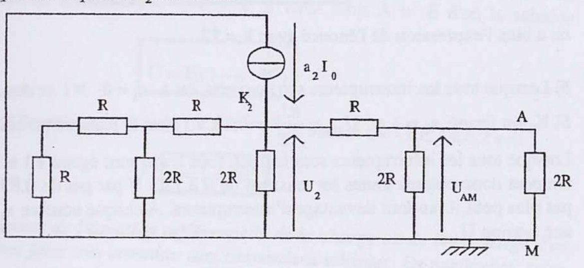


a) En utilisant les lois d'association des résistors, on trouve facilement que $\boxed{x = R}$

b) Le résistor x est en parallèle avec le résistor 2R ; (cf fig.2)
la résistance équivalente est $\frac{2R}{3}$;
elle est parcourue par le courant $a_3 I_0$; on a

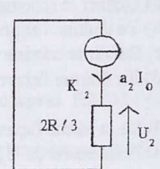
donc $$\boxed{U_{AM} = \frac{2R}{3} a_3 I_0}$$

2) a) Schéma équivalent quand K_2 est fermé :

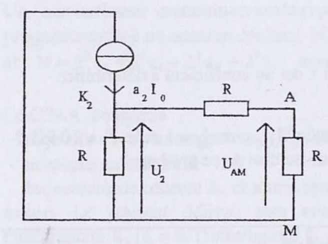


b) En associant les résistances, le montage précédent devient :

et on a directement : $\boxed{U_2 = \frac{2R}{3} a_2 I_0}$



c) Le schéma de la fig.1 lorsque K_2 est fermé peut également se dessiner :



et on voit que $\boxed{U_{AM} = \frac{U_2}{2}}$

d) On en déduit $\boxed{U_{AM} = \frac{2R}{6} a_2 I_0}$

3)a) De la même façon quand K_1 est fermé et les autres ouverts, on a $U_1 = \frac{2.R}{3} a_1 I_0$.

Sur la fig.1, si K_1 seul est fermé, on voit que $U_{AM} = \frac{U_2}{2} = \frac{U_1}{4}$; donc $\boxed{U_{AM} = \frac{2R}{12} a_1 I_0}$

b) Quand seul l'interrupteur K_0 est fermé on a de même :

$U_0 = \frac{2R}{3} a_0 I_0$ et $U_{AM} = \frac{U_2}{2} = \frac{U_1}{4} = \frac{U_0}{8}$ d'où $\boxed{U_{AM} = \frac{2R}{24} a_0 I_0}$

4) La valeur de U_{AM} quand tous les interrupteurs sont en fonctionnement, est la somme des valeurs obtenues séparément :

$U_{AM} = \frac{2R}{3} a_3 I_0 + \frac{2R}{6} a_2 I_0 + \frac{2R}{12} a_1 I_0 + \frac{2R}{24} a_0 I_0$ et cette expression s'écrit :

$$\boxed{U_{AM} = \frac{RI_0(a_0 + 2a_1 + 4a_2 + 8a_3)}{12}}$$

on a bien l'expression de l'énoncé avec $k = 12$.

5) Lorsque tous les interrupteurs sont ouverts, on a $a_i = 0 \quad \forall i$ et donc $U_{AM} = 0$.

Si K_0 est fermé, $a_0 = 1$ et $U_{AM} = \frac{RI_0}{12} = 0{,}83$ V ; c'est la plus petite variation de U_{AM}.

Lorsque tous les interrupteurs sont fermés, tous les a_i sont égaux à 1 et $U_{AM} = 12{,}5$ V

On peut donc obtenir toutes les tensions de 0 à 12,5 V par pas de 0,83 V. Pour avoir un pas plus petit il faudrait davantage d'interrupteurs. A chaque nombre $a_3a_2a_1a_0$ correspond une tension U_{AM}.

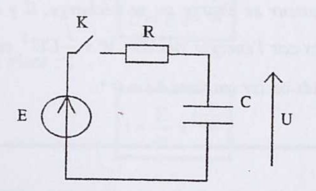
Circuits en régime transitoire

Exercice 1

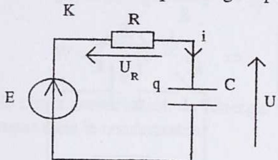
A t = 0, le condensateur n'est pas chargé et on ferme l'interrupteur.

1) Etablir l'expression de U(t).

2) Déterminer le temps au bout duquel le condensateur aura atteint 80 % de sa valeur.



1) Notons i l'intensité traversant le circuit et q la charge supérieure du condensateur :



Avec ces notations, nous avons les relations suivantes :

$$U = \frac{q}{C} \qquad i = \frac{dq}{dt} \quad \text{d'où } i = C\frac{dU}{dt}$$

Nous avons d'autre part $U + U_R = U + Ri = E$, on en tire avec les relations précédentes l'équation différentielle en U :

$$U + RC\frac{dU}{dt} = E$$

D'où :

$$\frac{dU}{dt} + \frac{1}{RC}U = \frac{E}{RC}$$

La solution de cette équation est du type : $U = E + Ae^{-\frac{t}{RC}}$. La constante A se trouve en exploitant la condition initiale : t = 0, U = 0. Il vient ainsi A = -E d'où la solution cherchée :

$$\boxed{U = E(1 - e^{-\frac{t}{RC}})}$$

2) Il faut résoudre l'équation $0{,}8\,E = E(1 - e^{-\frac{t}{RC}})$. On obtient t = - RC Ln 0,2 soit :

$$\boxed{t = 1{,}6\ RC}$$

Remarques

1) Dans l'établissement de l'équation différentielle de la charge ou de la décharge d'un condensateur, il faut faire très attention aux conventions utilisées. En particulier, selon

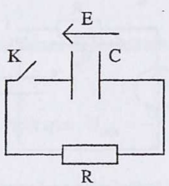
le sens de l'intensité dans le circuit, on peut avoir $i = \pm\frac{dq}{dt}$. *Une erreur de signe se traduira dans l'équation finale par une exponentielle croissante en* e^{+at} *qui diverge pour t tendant vers l'infini. Conclusion : Attention aux signes !*

2) Le résultat de la seconde question peut être trouvé approximativement sans aucun calcul. La constante de charge valant RC, il faut savoir qu'un condensateur se charge en environ 3RC (95% de la charge). Ici, l'énoncé demandant 80%, on pouvait, sans calcul, proposer une valeur de l'ordre de 2RC.

3) Lorsqu'un condensateur se charge ou se décharge, il y a toujours continuité de la tension U à ses bornes car l'énergie stockée $W = \frac{1}{2}CU^2$ *est continue. Ceci permet de déterminer les intensités ou les tensions à* $t = 0^+$.

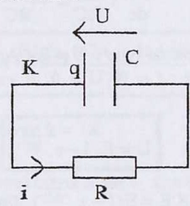
Exercice 2

On considère le circuit suivant où le condensateur de capacité C est chargé avec une tension E. A l'instant t = 0, on abaisse l'interrupteur K et on note U(t) et i(t), respectivement la tension aux bornes du condensateur et l'intensité dans le circuit à l'instant t.



1) Quelle est la valeur de i pour $t = 0^+$?
2) Etablir les équations horaires de U(t) et i(t).
3) Calculer l'énergie dissipée dans la résistance lorsque le condensateur est totalement déchargé. Le résultat est-il logique ?

1) Le montage à l'instant t est le suivant :



A l'instant $t = 0^+$, la continuité de la tension aux bornes du condensateur implique que $U(0^+) = E$. Cette tension s'appliquant aux bornes du résistor R, nous avons d'autre part $U(0^+) = Ri$, il en résulte que :

$$\boxed{i(0^+) = \frac{E}{R}}$$

2) Nous avons ici : $U = \frac{q}{C}$ $i = -\frac{dq}{dt}$ d'où $i = -C\frac{dU}{dt}$.

L'égalité des tensions aux bornes des dipôles donne : $U = Ri = -RC\frac{dU}{dt}$. L'équation différentielle en U est donc $\frac{dU}{dt} + \frac{1}{RC}U = 0$, d'où l'on tire la solution cherchée en tenant compte des conditions initiales :

$$\boxed{U = E\,e^{-\frac{t}{RC}}}$$

Comme $i = -C\frac{dU}{dt}$, il vient :

$$\boxed{i = \frac{E}{R}\,e^{-\frac{t}{RC}}}$$

3) Le résistor consomme une puissance Joule $P = Ri^2$. Entre t et t+dt, l'énergie consommée dW vaut :

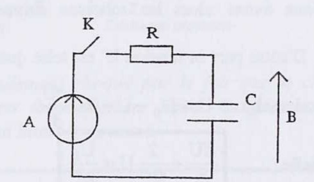
$$dW = Ri^2dt = \frac{E^2}{R}e^{-\frac{2}{RC}t}dt$$

d'où :

$$W = \int_0^{\infty}\frac{E^2}{R}e^{-\frac{2}{RC}t}dt \Rightarrow \boxed{W = \frac{1}{2}CE^2}$$

Le résultat était prévisible car la conservation de l'énergie impose que le résistor dissipe l'énergie stockée initialement dans le condensateur.

Remarque



Dans le cas d'un circuit série RC soumis à une tension A et où la tension initiale du condensateur vaut B, on obtient systématiquement l'équation différentielle $\frac{dU}{dt} + \frac{1}{RC}U = \frac{1}{RC}A$. *La solution générale de cette équation est de la forme* $U = A + Ke^{-\frac{t}{RC}}$ *et les conditions initiales impliquant que* $K = B - A$, *la formule générale de charge et de décharge d'un condensateur est :* $U = A + (B - A)\,e^{-\frac{t}{RC}}$. *On peut vérifier la validité de cette formule à travers les deux cas principaux :*

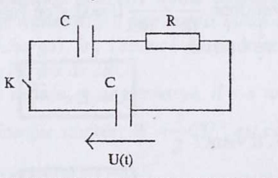
-- Charge : Dans le cas où B = 0 on obtient directement la formule classique $U = A(1 - e^{-\frac{t}{RC}})$ *du premier exercice.*

-- Décharge : Dans le cas où A = 0, la formule devient : $U = B\,e^{-\frac{t}{RC}}$ *comme dans le second exercice.*

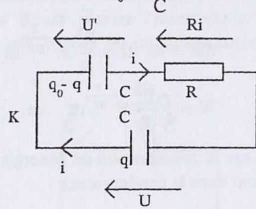
Ces deux dernières formules doivent être parfaitement connues et maîtrisées.

Exercice 3

A t = 0 on abaisse K. Trouver l'expression de U(t) sachant que le condensateur du bas est chargé initialement avec une tension U_0.



Il y a conservation de la charge aux bornes des deux condensateurs. Notons q la charge du condensateur du bas et q_0-q la charge du condensateur du haut (q_0 correspond à la charge initiale du condensateur du bas : $U_0 = \frac{q_0}{C}$).



Avec ces notations, Nous avons alors les relations suivantes : $i = -\frac{dq}{dt}$, $U = \frac{q}{C}$

et par suite : $i = -C\frac{dU}{dt}$. D'autre part la tension U' est telle que : $U' = \frac{q_0 - q}{C} = U_0 - U$.

La relation U = U' +Ri donne alors : $U = U_0 - U - RC\frac{dU}{dt}$.

D'où l'équation différentielle : $$\boxed{\frac{dU}{dt} + \frac{2}{RC}U = \frac{U_0}{RC}}$$

La solution de cette équation est : $U = \frac{U_0}{2} + Ae^{-\frac{2t}{RC}}$. La condition initiale U = U_0 permet de trouver $A = \frac{U_0}{2}$. On en tire la solution cherchée :

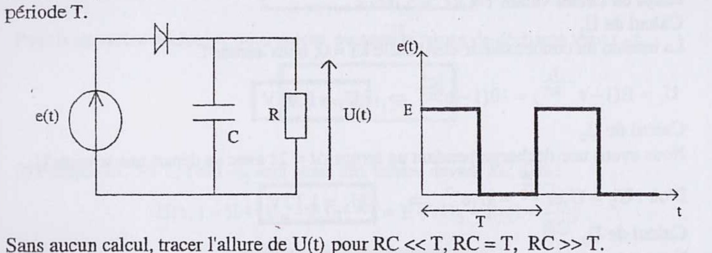
$$\boxed{U = \frac{U_0}{2}(1 + e^{-\frac{2t}{RC}})}$$

Remarque

Pour un temps infini, la formule précédente indique que la tension finale du condensateur vaut $\frac{U_0}{2}$. *Ceci était prévisible sans calcul. En effet, les tensions finales des deux condensateurs devant être identiques, et ceux-ci ayant la même capacité, la charge va se répartir également sur les deux condensateurs. Il en résulte que les tensions finales des deux condensateurs seront égales à* $\frac{U_0}{2}$.

Exercice 4

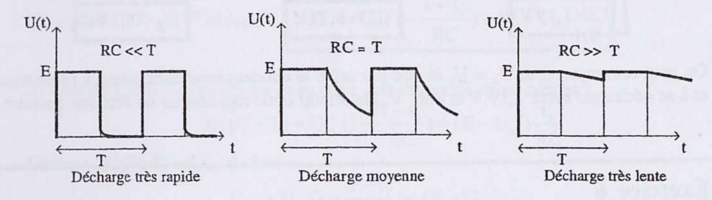
Soit le dispositif suivant où la diode est idéale et la tension e(t) du type créneau de période T.



Sans aucun calcul, tracer l'allure de U(t) pour RC << T, RC = T, RC >> T.

La charge du condensateur se fait quand e(t) = E. La diode est passante et la charge du condensateur se fait dans tous les cas de manière instantanée.

La décharge se fait pour e(t) = 0. Lors de cette décharge, la diode est bloquée, et cette décharge s'effectue dans la résistance R. Tout dépend donc de la valeur de RC par rapport à T, la décharge s'effectuant plus ou moins rapidement.



Remarque

On peut être éventuellement choqué par le fait que la charge étant instantanée, le courant de charge est théoriquement infini. En fait, la diode possède une faible résistance interne r qui limite le courant.

Exercice 5

R = 500 Ω
C = 10 μ F
E = 10 V

Le générateur délivre une tension créneau e(t) de période T= 2.10^{-2} s telle que, n étant un nombre entier positif ou nul :

$nT < t < (n+\frac{1}{2})T : e(t) = E \qquad (n+\frac{1}{2})T < t < (n+1)T : e(t) = 0$

Le condensateur étant déchargé à t = 0, déterminer les valeurs numériques de U(t) pour $t = p10^{-2}$ s avec $p = 1,2,3,4,5,6$. Commenter les résultats.

Notons U_i la tension à l'instant $t = i.10^{-2}$ s. Nous avons ici une succession de charges et de décharges du condensateur pendant des temps $\Delta t = 10^{-2}$ s avec une constante de temps du circuit valant $\tau = RC = 5.10^{-3}$ s.

Calcul de U_1

La tension du condensateur étant nulle à $t = 0$, nous aurons :

$$U_1 = E(1 - e^{-\frac{t_1}{RC}}) = 10(1 - e^{-2}) \Rightarrow \boxed{U_1 = 8{,}65\text{V}}$$

Calcul de U_2

Nous avons une décharge pendant un temps $\Delta t = 2\tau$ avec au départ une tension U_1.

D'où : $U_2 = U_1 e^{-\frac{\Delta t}{RC}} = U_1 e^{-2} \Rightarrow \boxed{U_2 = 1{,}17\text{V}}$

Calcul de U_3

Nous avons maintenant une charge pendant $\Delta t = 2\tau$ avec au départ une tension U_2. La remarque de l'exercice 2 permet d'écrire :

$$U_3 = E + (U_2 - E)e^{-\frac{\Delta t}{RC}} \Rightarrow \boxed{U_3 = 8{,}80\text{V}}$$

Calcul de U_4, U_5, U_6

On recommence de la même manière et on obtient :

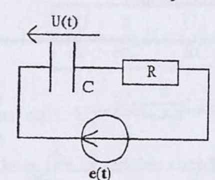
$$\boxed{U_4 = 1{,}19\text{V}} \quad \boxed{U_5 = 8{,}81\text{V}} \quad \boxed{U_6 = 1{,}19\text{V}}$$

On peut remarquer que $U_4 = U_6$ et que par suite le condensateur continuera à se charger et à se décharger entre 1,19 V et 8,81 V. On atteint donc rapidement un état stationnaire.

Exercice 6

On considère un circuit RC alimenté par un générateur délivrant une tension créneau de période T telle que, n étant un nombre entier positif ou nul :

$$nT < t < nT + t_1 : e(t) = E \qquad nT + t_1 < t < (n+1)T : e(t) = 0$$



1) A $t = 0$, le condensateur est supposé chargé avec une tension U_0. Déterminer U(t) pour $0 < t < t_1$ et pour $t_1 < t < T$.

2) On se place dans le cas où $RC >> T$. Exprimer alors les valeurs de $U(t_1)$ et U(T) à l'aide d'un développement limité au 1er ordre.

3) Au bout d'un temps égal à K périodes ($K >> 1$), on atteint un régime permanent caractérisé par : $U(pT) = U(pT+T) = U_m$, p étant un nombre entier supérieur à K. Exprimer U_m en fonction de E, t_1 et T.

Annexe : On donne $x \to 0$ $\quad e^x = 1 + x$

1) Pour la première charge jusqu'à $t = t_1$, nous aurons classiquement :

$$\boxed{U(t) = E + (U_0 - E)e^{-\frac{t}{RC}}}$$

Pour la première décharge, nous aurons puisque le temps de décharge vaut $t - t_1$:

$$\boxed{U(t) = U(t_1)e^{-\frac{t-t_1}{RC}}}$$

2) Puisque $RC >> T$, t et $t - t_1$ sont aussi très faibles devant RC d'où :

$$U(t_1) = E + (U_0 - E)e^{-\frac{t_1}{RC}} = E + (U_0 - E)(1 - \frac{t_1}{RC})$$

On en tire $U(t_1)$: $\boxed{U(t_1) = U_0 + (E - U_0)\frac{t_1}{RC}}$

$$U(T) = U(t_1)e^{-\frac{T-t_1}{RC}} = \left[U_0 + (E - U_0)\frac{t_1}{RC}\right](1 - \frac{T - t_1}{RC})$$

On en tire U(T) au 1er ordre : $\boxed{U(T) = U_0(1 - \frac{T - t_1}{RC}) + (E - U_0)\frac{t_1}{RC}}$

3) Lors du cycle charge-décharge au bout d'un temps pT, nous aurons :

$$U(pT + T) = U_m(1 - \frac{T - t_1}{RC}) + (E - U_m)\frac{t_1}{RC}$$

Comme $U(pT+T) = U_m$, il vient :

$$U_m = U_m(1 - \frac{T - t_1}{RC}) + (E - U_m)\frac{t_1}{RC}$$

On en tire : $\boxed{U_m = \frac{Et_1}{T}}$

Remarque

Comme $RC >> T$, en régime permanent, le condensateur n'a pas le temps de se charger ni de se décharger. On a donc $U(pT) = U(pT+t_1) = U(pT+T) = U_m$ et on peut vérifier qualitativement le résultat final en testant quelques cas évidents.

---- $t_1 = 0$: Le condensateur ne se charge pas d'où $U_m = 0$.

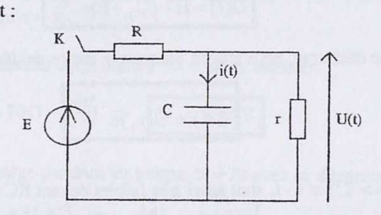
---- $t_1 = T$: Le condensateur se charge complètement d'où $U_m = E$.

---- $t_1 = \frac{1}{2}T$: Le condensateur se charge et se décharge durant des temps égaux. Il est logique qu'il se stabilise à $U_m = \frac{1}{2}E$.

Plus finement, les petites charges et décharges sont assimilables à des portions de droite de pentes respectives $\frac{dU}{dt}(charge) = \frac{E - U_m}{RC}$ et $\frac{dU}{dt}(décharge) = -\frac{U_m}{RC}$. En régime permanent, la charge compensant la décharge, nous devons donc avoir $\frac{E - U_m}{RC}t_1 = \frac{U_m}{RC}(T - t_1)$ et on retrouve la relation : $U_m = \frac{Et_1}{T}$.

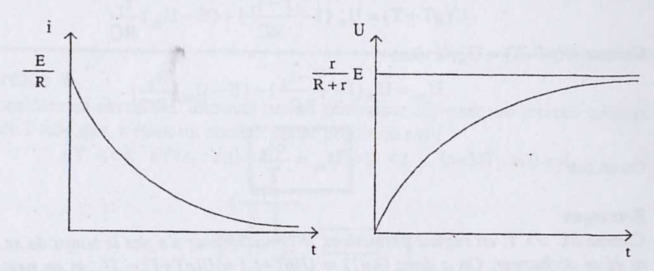
Exercice 7

Soit le circuit suivant :

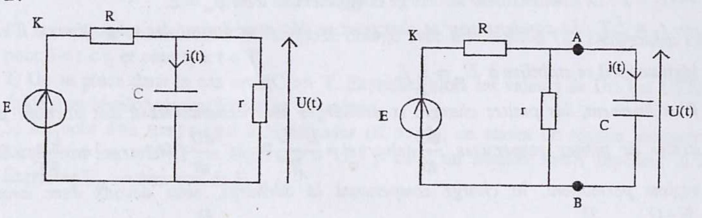


À $t = 0$ on abaisse l'interrupteur K.
1) Sans aucun calcul, tracer l'allure des courbes U(t) et i(t).
2) Retrouver les résultats en établissant les équations de U(t) et i(t).

1) Lorsque l'interrupteur est baissé, le condensateur commence à se charger. Au début, il va se comporter comme un fil si bien que $U(0^+) = 0$ et $i(0^+) = \frac{E}{R}$, aucun courant ne traversant le résistor r. Lorsque la charge sera terminée, i sera nul et le courant débité par le générateur passera à travers r. Il en résulte un simple diviseur de tension aux bornes de C et nous aurons pour un temps t infini : $i = 0$ et $U = \frac{r}{R+r}E$. Les courbes i(t) et U(t) auront donc les allures suivantes :



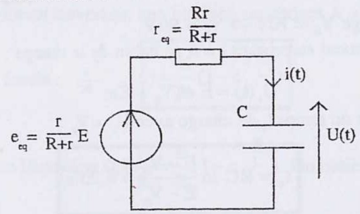
2) Pour étudier quantitativement le montage, il est plus simple de transformer celui-ci en permutant C et r et en cherchant le dipôle de Thévenin équivalent entre les points A et B.



---- La f.e.m équivalente entre A et B se trouve facilement en considérant le diviseur de tension, d'où : $e_{eq} = \frac{r}{R+r}E$.

---- La résistance équivalente correspond à r // R, d'où : $r_{eq} = \frac{Rr}{R+r}$.

Le montage est maintenant :

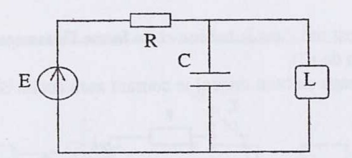


On retombe donc sur le cas classique de la charge d'un condensateur dans un montage r_{eq}, C, e_{eq} et les résultats sont immédiats :

$$U = \frac{r}{R+r}E\left(1 - e^{-\frac{R+r}{RrC}t}\right) \quad \text{et} \quad i = C\frac{dU}{dt} = \frac{E}{R}e^{-\frac{R+r}{RrC}t}$$

Exercice 8

L est une lampe au néon de tension d'allumage $V_a = 90$ V et de tension d'extinction $V_b = 70$ V. Lorsque la lampe est éteinte, sa résistance peut être considérée comme infinie ; lorsqu'elle est allumée, sa résistance prend la valeur $r = 10000\ \Omega$.
On monte L dans le circuit suivant :



$E = 200$ V $R = 10^7\ \Omega$ $C = 150$ nF

On constate que la lampe émet des flashs lumineux avec une période T= 0,25 s.
1) En tenant compte des valeurs numériques de l'énoncé, justifier qualitativement le fait que la lampe émette des flashs.
2) Retrouver par le calcul la valeur de T et proposer une valeur pour la durée d'un flash lumineux.

1) Lorsque la lampe est éteinte, le condensateur se charge avec une constante de temps $\tau = RC = 1{,}5$ s. Lorsque sa tension U_c devient égale à la tension d'allumage V_a, la lampe devient conductrice et le condensateur se décharge rapidement dans celle-ci ($\tau' = rC = 1{,}5$ ms) en émettant un flash jusqu'à ce que sa tension devienne égale à

V_b = 70 V. La lampe s'éteignant, le condensateur recommence à se charger. Le phénomène charge-décharge se reproduit donc périodiquement avec le cycle suivant :
---- Charge lente $V_b = 70V \to V_a = 90V$. La lampe est éteinte.
---- Décharge rapide $V_a = 90V \to V_b = 70V$. La lampe est allumée et émet un flash.
En conclusion la lampe émet des flashs avec une période $T = t_{charge} + t_{décharge} \approx t_{charge}$

2) a) Etude de la charge $V_b = 70V \to V_a = 90V$.
Nous avons classiquement en prenant t = 0 au début de la charge :

$$U_c(t) = E + (V_b - E)e^{-\frac{t}{RC}}$$

On en déduit la valeur du temps t_c de charge avec $U_c = V_a$:

$$\boxed{t_c = RC\ \ln\frac{E - V_b}{E - V_a} = 0{,}25\ s}$$

b) Etude de la décharge $V_a = 90V \to V_b = 70V$.
Là aussi, nous avons classiquement en négligeant la branche (E, R) et en prenant t = 0 au début de la décharge :

$$U_c(t) = V_a e^{-\frac{t}{rC}}$$

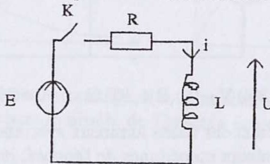
D'où la valeur du temps t_d de décharge avec $U_c = V_b$:

$$\boxed{t_d = rC\ \ln\frac{V_a}{V_b} = 0{,}38\ ms}$$

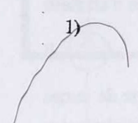
La lampe émet donc des flashs de durée 0,38 ms avec une période T = 0,25 s.

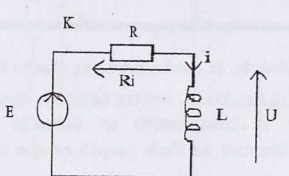
Exercice 9

A t = 0, le courant est nul dans la bobine et on ferme l'interrupteur.
1) Etablir l'équation de i(t).
2) Déterminer le temps au bout duquel le courant aura atteint 80% de sa valeur finale.



1)





Nous avons $E = Ri + L\frac{di}{dt}$. L'équation différentielle est donc : $\frac{di}{dt} + \frac{R}{L}i = \frac{E}{L}$.

La solution de ce type d'équation est $i = \frac{E}{R} + Ae^{-\frac{R}{L}t}$. La condition initiale étant i = 0 (continuité du courant traversant une bobine), on obtient $A = -\frac{E}{R}$.

D'où la solution finale : $\boxed{i = \frac{E}{R}(1 - e^{-\frac{R}{L}t})}$

2) Il faut résoudre l'équation $0{,}8\frac{E}{R} = \frac{E}{R}(1 - e^{-\frac{R}{L}t})$. On obtient $t = -\frac{L}{R}\ln 0{,}2$, d'où :

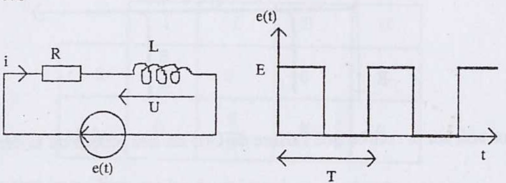
$$\boxed{t = 1{,}6\frac{L}{R}}$$

Remarques

1) De même que pour le premier exercice, la constante de temps de l'établissement d'un courant i dans un circuit RL est $\tau = \frac{L}{R}$. *On pouvait donc s'attendre à environ* $t = 2\tau$ *pour l'établissement à 80 %.*

2) Il y a toujours continuité du courant traversant une bobine car l'énergie stockée $W = \frac{1}{2}Li^2$ *est continue. Une conséquence spectaculaire de ce phénomène est l'apparition d'un arc électrique au niveau d'un interrupteur lorsque l'on cherche à couper le courant dans un circuit RL.*

Exercice 10



On suppose que i et U sont nuls pour t < 0 et le montage est tel que $\tau = \frac{L}{R} << T$.

1) Tracer l'allure de U(t) pour t > 0.
2) Quel est le lien mathématique approximatif entre U(t) et e(t) ?

1) Dans tous les cas, l'équation différentielle à résoudre en i est :

$$\frac{di}{dt} + \frac{R}{L}i = \frac{e(t)}{L}$$

a) $0<t<\frac{T}{2}$: L'équation est $\frac{di}{dt}+\frac{R}{L}i=\frac{E}{L}$ avec $i(0)=0$.

Le courant s'établit selon la loi : $i=\frac{E}{R}(1-e^{-\frac{t}{\tau}})$. Comme $U=L\frac{di}{dt}$, il vient :

$$\boxed{U=E\,e^{-\frac{t}{\tau}}}$$

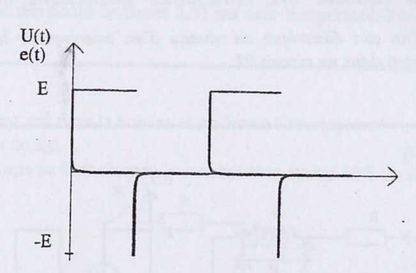
Puisque $\tau << T$, cela signifie que U décroît très rapidement de E à 0 tandis que i monte rapidement de 0 à $\frac{E}{R}$.

b) $\frac{T}{2}<t<T$: L'équation est $\frac{di}{dt}+\frac{R}{L}i=0$ avec $i(\frac{T}{2})=\frac{E}{R}$.

On obtient alors : $i=\frac{E}{R}\,e^{-\frac{t-\frac{T}{2}}{\tau}}$ et par suite avec $U=L\frac{di}{dt}$:

$$\boxed{U=-E\,e^{-\frac{t-\frac{T}{2}}{\tau}}}$$

U monte donc rapidement de -E à 0 tandis que i décroît rapidement de $\frac{E}{R}$ à 0. L'aspect de U(t) est donc le suivant :



2) On peut voir sur la courbe que l'allure de U(t) est très proche de la dérivée de e(t).

Remarque

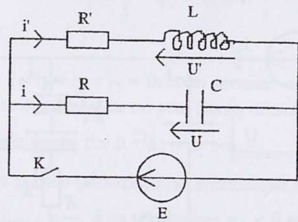
On peut être étonné par ce résultat et il est intéressant d'approfondir la compréhension de ce phénomène que l'on retrouve aussi dans le cas d'un circuit RC en prenant la tension aux bornes du résistor dans le cas $RC << T$.

Le point clé est que la constante de temps du circuit est très petite devant la période du signal créneau. Le circuit "répond" donc très rapidement et la tension U est pratiquement toujours nulle sauf aux points de discontinuité de e(t). On peut d'ailleurs généraliser le phénomène au cas où e(t) n'est pas de type créneau mais où l'approximation $U << Ri$ est cependant valable. Dans ce cas, l'équation $e(t)=Ri+U$ donne $e(t)=Ri$ et comme $U=L\frac{di}{dt}$, il vient $U=\frac{L}{R}\frac{de(t)}{dt}$.

Nous laissons au lecteur le soin d'étudier lui même le cas du circuit RC.

Exercice 11

On considère le circuit suivant où le condensateur est déchargé.



A t = 0, on ferme l'interrupteur et on pose $\tau=RC$ et $\tau'=\frac{L}{R'}$.

1) Donner les valeurs des courants i et i' et des tensions U et U' pour $t=0^+$ et t infini. On présentera les résultats dans un tableau.

2) Quelles sont les expressions de i'(t) et U(t) ?

1) $t=0^+$

Il y a continuité de la tension aux bornes du condensateur $\Rightarrow$ $U(0^+)=0$ et $i(0^+)=\frac{E}{R}$

Il y a continuité du courant dans la bobine $\Rightarrow$ $i'(0^+)=0$ et $U'(0^+)=E$

t infini

Le condensateur est complètement chargé $\Rightarrow$ $U(\infty)=E$ et $i(\infty)=0$

Le courant i' est constant et la bobine se comporte comme fil ($U=L\frac{di'}{dt}=0$)

$$\Rightarrow i'(\infty)=\frac{E}{R'} \text{ et } U'(\infty)=0$$

On en tire le tableau des résultats :

	i	i'	U	U'
t = 0	$\frac{E}{R}$	0	0	E
t infini	0	$\frac{E}{R'}$	E	0

2) Les résultats sont immédiats car les deux branches sont indépendantes :

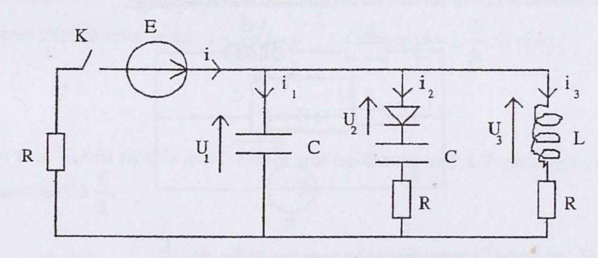
$$\boxed{i'=\frac{E}{R'}(1-e^{-\frac{R'}{L}t}) \qquad U=E(1-e^{-\frac{t}{RC}})}$$

Remarque

Dans ce type d'exercice, il faut soigneusement étudier les conditions initiales. D'une manière générale, ce sont toujours les conditions de continuité des intensités dans les bobines, et des tensions aux bornes des condensateurs, qui permettent d'obtenir les résultats.

Exercice 12

Soit le circuit suivant où la diode est idéale :



1) A t = 0, les condensateurs étant déchargés, on abaisse K. Sans calcul, préciser les valeurs de i_1, i_2, i_3, i, u_1, u_2, u_3 pour t = 0+ et t infini .

2) Lorsque le régime permanent est établi, on relève K au temps t' = 0. Préciser les nouvelles valeurs de i_1, i_2, i_3, i, u_1, u_2, u_3 pour t' = 0+ et t' infini .

1) a) t = 0+

Le condensateur de la première branche se comporte comme un fil et court-circuite les autres branches. Nous aurons donc :

$$i = i_1 = \frac{E}{R} \quad i_2 = i_3 = 0 \quad u_1 = u_2 = u_3 = 0$$

b) t infini

Le régime étant établi, les condensateurs sont chargés et la bobine se comporte comme un fil. La branche comportant la bobine se comporte simplement comme un résistor R et sa tension vaut $\frac{E}{2}$ (pont diviseur avec l'autre résistor R). Les résultats sont alors les suivants :

$$i_1 = i_2 = 0 \quad i = i_3 = \frac{E}{2R} \quad u_3 = u_2 = 0 \quad u_1 = \frac{E}{2}$$

	i	i_1	i_2	i_3	u_1	u_2	u_3
t = 0	$\frac{E}{R}$	$\frac{E}{R}$	0	0	0	0	0
t infini	$\frac{E}{2R}$	0	0	$\frac{E}{2R}$	$\frac{E}{2}$	0	0

2) a) t' = 0+

Lorsque l'on relève l'interrupteur, il y a continuité de la tension aux bornes des condensateurs et de l'intensité parcourant la bobine.

---- Le courant global i étant nul, la bobine va imposer son courant i_3 dans le premier condensateur car la diode de la deuxième branche est dans le sens bloquant.

Il en résulte :

$$i = i_2 = 0 \quad i_3 = \frac{E}{2R} \quad i_1 = -\frac{E}{2R}$$

---- Pour les tensions nous avons : $u_1 = \frac{E}{2} = u_2 + \frac{E}{2} = u_3 + R(\frac{E}{2R})$. On en tire :

$$u_1 = \frac{E}{2} \quad u_2 = u_3 = 0$$

b) t' infini

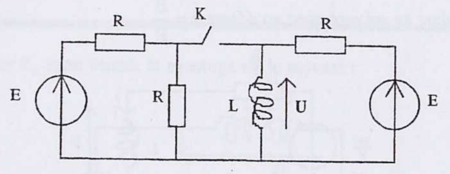
Nous aurons bien sûr $i = i_1 = i_2 = i_3 = 0$ et le premier condensateur étant déchargé $u_1 = u_3 = 0$. Le deuxième condensateur ne peut pas se décharger à cause de la diode. En effet, nous avons pour tout temps t' > 0 : $u_1 = u_2 + u_{condensateur}$ avec $u_1 < \frac{E}{2}$ à cause de la décharge (qui peut être pseudo-périodique ou apériodique selon les valeurs de L et R). Comme au départ $u_{condensateur} = \frac{E}{2}$, il en résulte que $u_2 < 0$ et que la diode sera toujours bloquée. Nous aurons ainsi finalement pour t' infini $u_1 = 0 = u_2 + \frac{E}{2} \Rightarrow u_2 = -\frac{E}{2}$

Globalement, les résultats sont donc les suivants :

	i	i_1	i_2	i_3	u_1	u_2	u_3
t' = 0	0	$-\frac{E}{2R}$	0	$\frac{E}{2R}$	$\frac{E}{2}$	0	0
t' infini	0	0	0	0	0	$-\frac{E}{2}$	0

Exercice 13

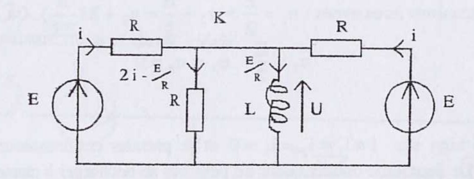
Le courant étant établi dans la partie droite du circuit, on abaisse l'interrupteur K à l'instant t = 0.



1) Trouver la valeur de U(0+).

2) Quelle est l'expression de U(t)

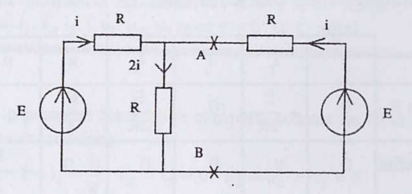
1) Avant la fermeture de l'interrupteur, le courant parcourant la bobine vaut $i = \frac{E}{R}$. Par continuité, nous avons donc après la fermeture $i(0^+) = \frac{E}{R}$. La répartition des intensités dans le circuit après la fermeture est ainsi la suivante :



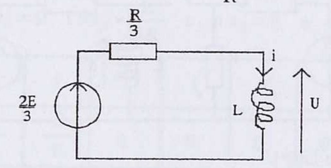
Nous avons alors : $U = E - Ri = R(2i - \frac{E}{R})$. On en tire $i = \frac{2E}{3R}$ et par suite :

$$\boxed{U(0^+) = \frac{E}{3}}$$

2) Cherchons le dipôle équivalent entre les points A et B :



Nous avons $E - Ri = 2Ri$ d'où $i = \frac{E}{3R}$. On en tire $E_{eq} = U_{AB} = 2Ri = \frac{2E}{3}$. D'autre part, on voit immédiatement que $R_{AB} = \frac{R}{3}$, les trois résistors R étant en parallèle. Le montage est donc équivalent au suivant avec au départ $i = \frac{E}{R}$.



Nous avons alors : $\frac{2E}{3} = \frac{R}{3}i + U$ avec $U = L\frac{di}{dt}$. On en tire l'équation différentielle :

$$\frac{di}{dt} + \frac{R}{3L}i = \frac{2E}{3L}$$

La condition initiale $i = \frac{E}{R}$ permet d'obtenir la solution : $i = \frac{E}{R}(2 - e^{-\frac{R}{3L}t})$. Avec la relation $U = L\frac{di}{dt}$, on obtient :

$$\boxed{U = \frac{E}{3}e^{-\frac{R}{3L}t}}$$

Remarque

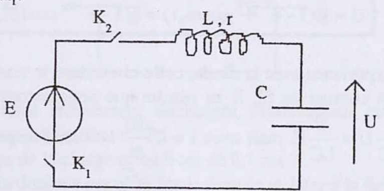
En dérivant l'équation différentielle en i, on aurait pu directement établir l'équation différentielle en U et l'intégrer avec la condition initiale $U(0^+) = \frac{E}{3}$. Tactiquement, cela aurait été une erreur car toute dérivation fait perdre une information importante. Ici, le fait de d'abord calculer i et ensuite U permet de vérifier la validité du résultat de la question 1 : $U(0^+) = \frac{E}{3}$.

Exercice 14

Soit le circuit suivant monté avec les composants suivants : générateur E = 5 V ; bobine L = 0,1 H r = 10 Ω ; condensateur C = 0,1 µF.

Initialement le condensateur est déchargé et l'interrupteur K_2 fermé.

A t = 0, on abaisse K_1.



1) En tenant compte des valeurs numériques, établir une expression numérique approchée pour U(t). On posera $\omega_0 = \frac{1}{\sqrt{LC}}$.

2) Que se passe-t-il si l'on refait la même expérience en remplaçant K_2 par une diode idéale ?

1) L'interrupteur K_2 étant fermé, le montage est le suivant :

Nous avons : $E = ri + L\frac{di}{dt} + U$ avec $i = c\frac{dU}{dt}$. On obtient ainsi l'équation différentielle en U :

$$LC\frac{d^2U}{dt^2} + rC\frac{dU}{dt} + U = E$$

ou :

$$\frac{d^2U}{dt^2} + \frac{r}{L}\frac{dU}{dt} + \frac{1}{LC}U = \frac{1}{LC}E$$

$$\Delta = \frac{r^2}{L^2} - \frac{4}{LC} = 10^4 - 4.10^8 \approx -4.10^8 = -4\omega_0^2$$

Les racines du polynôme caractéristique sont donc :

$$r_1 = -\frac{r}{2L} + i\omega_0 \quad \text{et} \quad r_2 = -\frac{r}{2L} - i\omega_0$$

On en tire la solution :

$$U(t) = E + e^{-\frac{r}{2L}t}(A\cos\omega_0 t + B\sin\omega_0 t)$$

Les conditions initiales $U = 0$ et $i = C\frac{dU}{dt} = 0$ permettent de trouver les valeurs de A et B. On obtient après calculs : $A = -E$ $\quad B = -\frac{r}{2L\omega_0}E = -5.10^{-3}E << E$. L'expression approchée de U cherchée est ainsi :

$$\boxed{U \approx E(1 - e^{-\frac{r}{2L}t}\cos\omega_0 t) = 5(1 - e^{-50t}\cos 10^4 t)}$$

2) Si l'on refait l'expérience avec la diode, celle-ci est dans le sens passant pour $t = 0^+$ et elle se comportera comme un fil. Il en résulte que nous aurons à nouveau l'équation $\frac{d^2U}{dt^2} + \frac{r}{L}\frac{dU}{dt} + \frac{1}{LC}U = \frac{1}{LC}E$ mais avec $i = C\frac{dU}{dt} > 0$ car i ne peut être négatif à cause de la diode.

Le condensateur va donc se charger jusqu'à une tension U_{max} et puis sa tension restera constante. Vu les valeurs numériques, U_{max} sera obtenu pour $\cos 10^4 t = -1$ soit $t = \frac{\pi}{10^4}$.

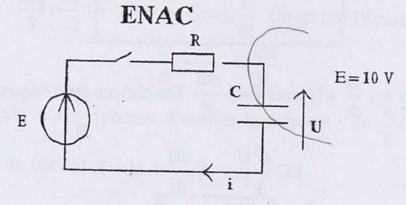
D'où :

$$\boxed{U_{max} = 4,4(1 + e^{-\frac{50\pi}{10^4}}) = 8,73 \text{ V}}$$

Remarque

Attention aux erreurs de signe dans l'établissement de l'équation différentielle. Il faut savoir qu'une équation du type af" + bf' + cf = g(t) n'admet des solutions acceptables, c'est à dire avec des termes en e^{-rt} avec r > 0, que si les coefficients a, b et c ont même signe.

Exercice 15 — ENAC

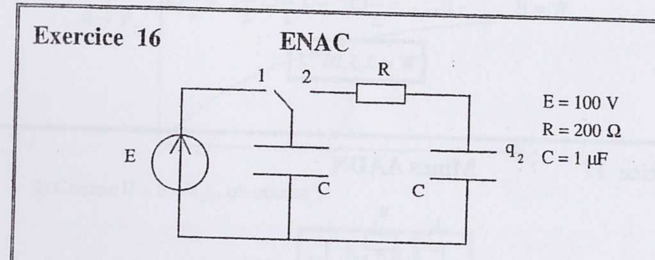


A t = 0, on ferme l'interrupteur avec U = 2 V. Sachant qu'à t = 10 ms on a U = 6 V et i = 1 mA, calculer les valeurs de R et C.

Nous avons classiquement : $U = E + (U_0 - E)e^{-\frac{t}{RC}}$ et $i = C\frac{dU}{dt} = \frac{E - U_0}{R}e^{-\frac{t}{RC}}$. On en tire numériquement : $e^{-\frac{t}{RC}} = \frac{1}{2}$ et $10^{-3} = \frac{8}{R}e^{-\frac{t}{RC}} = \frac{4}{R}$. D'où les résultats :

$$\boxed{R = 4000\ \Omega \quad C = 3,6\ \mu F}$$

Exercice 16 — ENAC

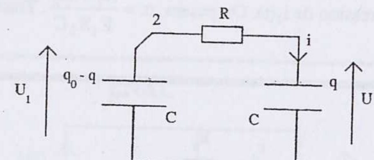


Les condensateurs étant initialement déchargés, l'interrupteur est d'abord relié à la borne 1 puis à la borne 2 à l'instant t = 0.

1) Quelle est la valeur de la charge q_2 au bout de 0,1 ms ?

2) Quelle est l'énergie dissipée par effet Joule dans le résistor à la fin de la décharge ?

1) Lorsque l'interrupteur est en position 1, le condensateur central se charge instantanément avec la charge $q_0 = CE = 10^{-4}$ C. En position 2, le condensateur se décharge et le circuit à étudier est :



Nous avons en tenant compte de la conservation de la charge :

$$U_1 = Ri + U \quad \text{avec} \quad U_1 = \frac{q_0 - q}{C},\ U = \frac{q}{C},\ i = \frac{dq}{dt}$$

On en tire l'équation différentielle en q :

$$\frac{q_0 - q}{C} = R\frac{dq}{dt} + \frac{q}{C}$$

soit : $$\frac{dq}{dt} + \frac{2}{RC}q = \frac{1}{RC}q_0$$

Avec la condition $q = 0$ pour $t = 0$, on obtient : $q = \frac{q_0}{2}(1 - e^{-\frac{2t}{RC}})$

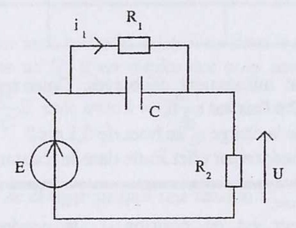
Pour t = 0,1 ms : $\boxed{q_2 = 3{,}16.10^{-5}\,C}$

2) A la fin de la décharge, $U_1 = U = \frac{E}{2}$. L'énergie consommée par effet Joule dans la résistance sera égale à la différence des énergies stockées dans les condensateurs entre le début de la décharge et le fin de celle-ci.
D'où :

$$W = E_{initiale} - E_{finale} = \frac{1}{2}CE^2 - 2.\frac{1}{2}C(\frac{E}{2})^2 = \frac{1}{4}CE^2$$

$$\boxed{W = 2{,}5.10^{-3}\,J}$$

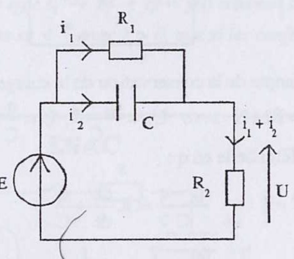
Exercice 17 Mines AADN



Au départ, le condensateur est déchargé. On ferme l'interrupteur à t = 0.
1) Déterminer l'expression de $i_1(t)$. On posera $\alpha = \frac{R_1 + R_2}{R_1 R_2 C}$. Tracer l'allure de $i_1(t)$.

2) En déduire U(t).

1)



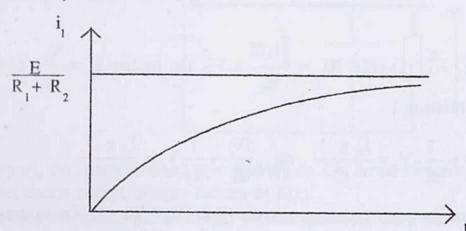
Nous avons $E = R_1 i_1 + R_2(i_1 + i_2)$ avec : $R_1 i_1 = \frac{\int i_2 dt}{C}$ soit $i_2 = R_1 C \frac{di_1}{dt}$. On obtient ainsi l'équation différentielle :

$$E = (R_1 + R_2) i_1 + R_1 R_2 C \frac{di_1}{dt}$$

En tenant compte de la condition initiale $i_1 = 0$ (le condensateur court-circuite R_1 au départ), il vient :

$$\boxed{i_1 = \frac{E}{R_1 + R_2}(1 - e^{-\alpha t})}$$

L'allure de $i_1(t)$ est la suivante :



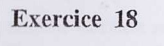
2) Comme $U = E - R_1 i_1$, on obtient :

$$\boxed{U = \frac{R_2 + R_1 e^{-\alpha t}}{R_1 + R_2} E}$$

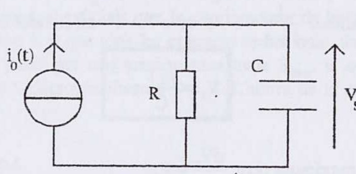
Remarque
On peut vérifier la validité des résultats en testant les formules pour t infini.

---- $i_1 = \frac{E}{R_1 + R_2}$. *Le résultat est logique car lorsque le condensateur est chargé, le montage se comporte comme une résistance $R_1 + R_2$.*

---- $U = \frac{R_2}{R_1 + R_2} E$. *Le résultat est conforme au diviseur de tension équivalent.*

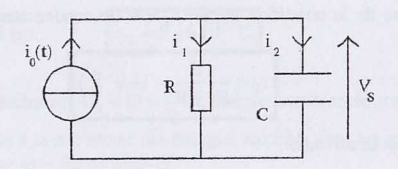


Exercice 18 ENAC



$i_0(t)$ est de la forme $i_0(t) = I_0 e^{-\frac{t}{\tau}}$ et on pose $RC = k\tau$.

1) Ecrire l'équation différentielle vérifiée par $V_s(t)$.
2) On suppose que le condensateur est initialement déchargé. Trouver l'expression de $V_s(t)$.
3) Déterminer $V_s(t)$ dans le cas particulier où k = 1. (on pourra poser $k = 1 + \varepsilon$ et faire un développement limité).
4) Pour k = 1, $V_s(t)$ passe par un maximum V_{sm} à l'instant t_0. Calculer V_{sm} et t_0.



1) Nous avons : $i_1 + i_2 = i_0$ (1) avec $Ri_1 = \frac{\int i_2 dt}{C} = V_s$. On en tire $i_1 = \frac{V_s}{R}$, $i_2 = C\frac{dV_s}{dt}$

et en injectant dans la relation 1 :

$$\frac{dV_s}{dt} + \frac{1}{RC}V_s = \frac{I_0 e^{-\frac{t}{\tau}}}{C} \quad \text{ou} \quad \frac{dV_s}{dt} + \frac{1}{k\tau}V_s = \frac{I_0 e^{-\frac{t}{\tau}}}{C}$$

La solution particulière de cette équation est du type : $V_s = Be^{-\frac{t}{\tau}}$. En injectant cette expression dans l'équation, on obtient : $B(-\frac{1}{\tau} + \frac{1}{k\tau}) = \frac{I_0}{C}$ soit $B = \frac{I_0}{C}\frac{k}{1-k}\tau$. La solution de l'équation sans second membre étant $Ae^{-\frac{t}{k\tau}}$, la solution générale de l'équation différentielle est :

$$V_s = Ae^{-\frac{t}{k\tau}} + \frac{I_0}{C}\frac{k\tau}{1-k}e^{-\frac{t}{\tau}}$$

2) Si l'on suppose que le condensateur n'est pas chargé au départ, la condition $V_s(0) = 0$ donne :

$$\boxed{V_s = \frac{I_0}{C}\frac{k\tau}{1-k}\left(e^{-\frac{t}{\tau}} - e^{-\frac{t}{k\tau}}\right)}$$

3) Posons $k = 1 + \varepsilon$. L'équation précédente donne :

$$V_s = -\frac{I_0}{C}\frac{k\tau}{\varepsilon}\left(e^{-\frac{t}{\tau}} - e^{-\frac{t}{(1+\varepsilon)\tau}}\right)$$

En exploitant les relations $\frac{1}{1+\varepsilon} \approx 1 - \varepsilon$ et $e^{-\varepsilon t} \approx 1 - \varepsilon t$, il vient finalement :

$$\boxed{V_s = \frac{I_0 t}{C}e^{-\frac{t}{\tau}}}$$

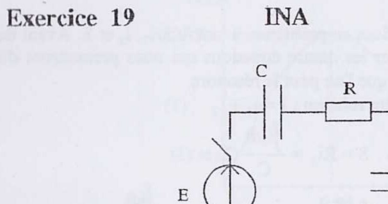
4) V_s passera par un maximum pour $\frac{dV_s}{dt} = 0$.

$$\frac{dV_s}{dt} = 0 = \frac{I_0}{C}\left(1 - \frac{t}{\tau}\right)e^{-\frac{t}{\tau}} \Rightarrow t = \tau$$

D'où les résultats:

$$\boxed{t_0 = \tau \qquad V_s = \frac{I_0\tau}{Ce}}$$

Exercice 19 INA



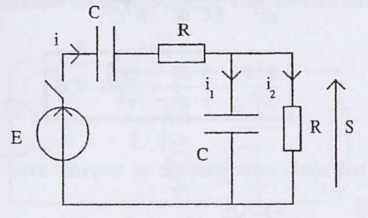
Au départ, les condensateurs sont déchargés. On ferme l'interrupteur à t = 0.

1) Sans aucun calcul, donner l'allure de S(t).

2) Trouver l'équation différentielle vérifiée par S(t). On posera RC = τ.

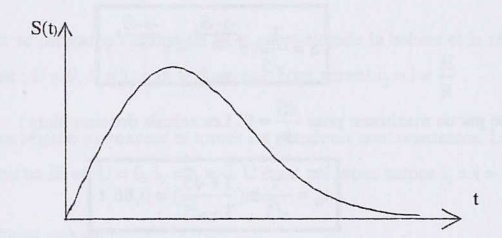
3) Intégrer cette équation et tracer S(t). Préciser le temps t_0 pour lequel S(t) passe par un maximum.

1) Notons i, i_1, i_2 les intensités dans les différentes branches.



Au début de la charge nous aurons à t = 0+ : $i = i_1 = \frac{E}{R}$ et $i_2 = 0$. Le condensateur de la branche verticale va donc commencer à se charger et S croîtra.

Pour un temps t très long, il est clair que le condensateur de la branche horizontale sera chargé sous une tension E et que tous les courants seront nuls, donc que S sera nul. Il en résulte qu'après être passé par une tension maximale S_{max}, le condensateur vertical se déchargera dans R et S décroîtra jusqu'à S = 0. L'allure de la courbe S(t) sera donc la suivante :



2) Nous avons à priori 4 inconnues dans ce problème, à savoir i, i_1, i_2 et S. Avant de se lancer dans les calculs, il faut trouver les quatre équations qui nous permettront d'être sûrs que le problème est bien posé et que l'on peut le résoudre.

---- La loi des nœuds donne la première relation : $i = i_1 + i_2$ (1)

---- Il y a deux manières d'exprimer S : $S = Ri_2 = \frac{\int i_1 dt}{C}$ (2) et (3)

---- La quatrième relation s'obtient par l'égalité des tensions : $E = \frac{\int i dt}{C} + Ri + S$ (4)

Le problème étant parfaitement posé, il ne reste plus qu'à combiner ces 4 équations pour obtenir l'équation différentielle cherchée.

(2) et (3) donnent : $i_2 = \frac{S}{R}$ et $i_1 = C\frac{dS}{dt}$. La relation (1) donne alors : $i = \frac{S}{R} + C\frac{dS}{dt}$. En dérivant la relation 4, il vient :

$$\frac{dS}{dt} + R\frac{di}{dt} + \frac{i}{C} = 0$$

Soit en injectant l'expression de i :

$$\frac{d^2S}{dt^2} + \frac{3}{RC}\frac{dS}{dt} + \frac{1}{R^2C^2}S = 0$$

ou :

$$\boxed{\frac{d^2S}{dt^2} + \frac{3}{\tau}\frac{dS}{dt} + \frac{1}{\tau^2}S = 0}$$

3) Les racines du polynôme caractéristique se trouvent avec $\Delta = \frac{9}{\tau^2} - \frac{4}{\tau^2} = \frac{5}{\tau^2}$. On obtient $r_1 = \frac{-3+\sqrt{5}}{2\tau}$, $r_2 = \frac{-3-\sqrt{5}}{2\tau}$ et la solution générale de l'équation différentielle est :

$$S = Ae^{\frac{-3+\sqrt{5}}{2\tau}t} + Be^{\frac{-3-\sqrt{5}}{2\tau}t}$$

Les conditions initiales S(0+) = 0 et $i_1(0^+) = C\frac{dS}{dt} = \frac{E}{R}$ permettent d'identifier A et B.

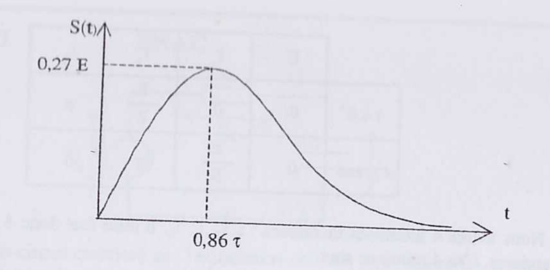
On obtient après calculs $A = -B = \frac{E}{\sqrt{5}}$, d'où :

$$\boxed{S = \frac{E}{\sqrt{5}}\left(e^{\frac{-3+\sqrt{5}}{2\tau}t} - e^{\frac{-3-\sqrt{5}}{2\tau}t}\right)}$$

S(t) passe par un maximum pour $\frac{dS}{dt} = 0$. Les calculs donnent alors :

$$\boxed{t_0 = \frac{\tau}{\sqrt{5}}\ln\left(\frac{3+\sqrt{5}}{3-\sqrt{5}}\right) = 0{,}86\ \tau}$$

L'aspect de la courbe est le suivant :

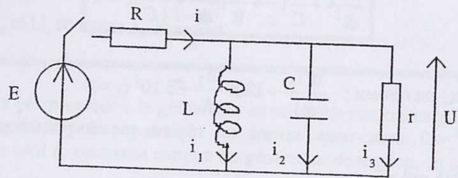


Remarque

Nous attirons l'attention du lecteur sur la manière de poser le problème au début de l'exercice. Il est primordial de prendre du recul et de trouver toutes les relations importantes avant de se lancer dans des calculs qui peuvent s'avérer complexes. Il est bon de rappeler qu'il est inutile de chercher à résoudre un système à n inconnues en utilisant ..... n-1 relations!

Exercice 20 — Mines AADN

Au départ, le condensateur C est déchargé et tous les courants sont nuls. On ferme l'interrupteur en t = 0.



1) Déterminer U, i_1, i_2, i_3 juste après la fermeture de l'interrupteur et au bout d'un temps très grand.

2) Etablir l'équation différentielle vérifiée par $i_3(t)$.

On donne : R = 2,5 kΩ ; r = 1,25 kΩ ; C = 1 μF ; L = 20 mH ; E = 6 V.

Montrer que la solution de l'équation différentielle correspond à un régime pseudo-périodique.

3) Déterminer l'expression numérique complète de U(t) et calculer sa valeur maximale.

1) **t = 0+**

Le condensateur se comporte comme un fil et court-circuite la bobine et la résistance R.

D'où les résultats : U = 0, $i_1 = i_3 = 0$. U étant nul, nous aurons $i_2 = i = \frac{E}{R}$

t infini

Nous sommes en régime permanent et toutes les grandeurs sont constantes. La bobine se comporte comme un fil et U = 0, $i_2 = i_3 = 0$. U étant nul, nous aurons $i_1 = i = \frac{E}{R}$

On en tire le tableau suivant :

	U	i_1	i_2	i_3
$t=0^+$	0	0	$\frac{E}{R}$	0
t grand	0	$\frac{E}{R}$	0	0

2) Nous avons 4 intensités inconnues : i, i_1, i_2, i_3. Il nous faut donc 4 relations liant ces grandeurs. Ces 4 relations sont :

$$i = i_1 + i_2 + i_3 \ (1) \qquad U = L\frac{di_1}{dt} = \frac{\int i_2 dt}{C} = r i_3 \ (2)(3) \qquad E = Ri + r i_3 \ (4)$$

(4) donne $i = \frac{E}{R} - \frac{r}{R} i_3$, (2) et (3) $i_1 = \frac{r}{L}\int i_3 dt$ et $i_2 = rC\frac{di_3}{dt}$. En injectant ces relations dans la relation (1), il vient :

$$rC\frac{di_3}{dt} + (1+\frac{r}{R})i_3 + \frac{r}{L}\int i_3 dt = \frac{E}{R}$$

Soit en dérivant et en divisant par rC :

$$\boxed{\frac{d^2 i_3}{dt^2} + \frac{1}{C}(\frac{1}{r}+\frac{1}{R})\frac{di_3}{dt} + \frac{1}{LC} i_3 = 0}$$

Numériquement,, on obtient : $\frac{d^2 i_3}{dt^2} + 1200\frac{di_3}{dt} + 5.10^7 i_3 = 0$.

$\Delta = -1,985.10^8 < 0$ donc nous aurons un régime pseudo-périodique de pulsation $\omega = \frac{\sqrt{-\Delta}}{2} = 7045$ rad.s^{-1}.

3) Comme $U = r i_3$, U sera de la forme : $U(t) = e^{-600t}(A\cos\omega t + B\sin\omega t)$. Les coefficients A et B se trouvent avec les conditions initiales $U(0^+)$ et $\frac{dU}{dt}(0^+)$:

--- $U(0^+) = 0$: on en tire A = 0.

--- Pour trouver $\frac{dU}{dt}(0^+)$, on se sert de la relation $U = \frac{\int i_2 dt}{C}$ d'où l'on tire :

$$\frac{dU}{dt} = \frac{i_2}{C} = \frac{E}{RC} = B\omega \text{ soit } B = \frac{E}{RC\omega} = 0,34\,V.$$

L'expression numérique de U est donc la suivante :

$$\boxed{U(t) = 0,34e^{-600t}\sin 7045t}$$

La valeur maximale de U se trouve pour :

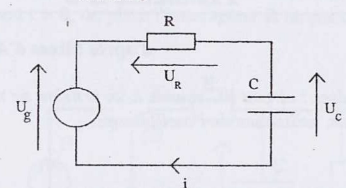
$$\frac{dU}{dt} = 0 = 0,34(-600\sin 7045t + 7045\cos 7045t)e^{-600t}$$

soit : $\tan(7045t) = 11,7$ $\quad t = 2,1.10^{-4}$ s

D'où :

$$\boxed{U_{max} = 0,30\ V}$$

Exercice 21 ENAC



Aux bornes d'un circuit constitué par l'association en série d'un résistor de résistance R et d'un condensateur de capacité C initialement déchargé, on branche un générateur à caractéristique $U_g(i)$ rectangulaire :

---- Lorsque le courant i débité par le générateur est inférieur à une valeur maximale i_0, le générateur se comporte comme une source de tension idéale de f.e.m E constante.

---- Lorsque $i \geq i_0$, le générateur se comporte comme une source de courant parfaite de courant électromoteur i_0 et la tension à ses bornes est inférieure ou égale à E.

On posera $I_0 = \frac{E}{R}$, $\alpha = \frac{i_0}{I_0}$ et $\tau = RC$.

1) Calculer les tensions U_R et U_g dans la cas où $\alpha > 1$.

2) Dans la suite , on se place dans le cas $\alpha < 1$. Déterminer $U_g(t)$ au début de la charge en fonction de α, E, τ et t.

3) Calculer U_g et U_c au temps $t_0 = \frac{1-\alpha}{\alpha}\tau$.

1) Le problème est de savoir si le générateur se comporte comme un générateur de tension ou un générateur de courant.
Si l'on suppose qu'il se comporte comme un générateur de tension, on sait que le courant est maximal au début de la charge et vaut $\frac{E}{R} = I_0$. Comme nous sommes dans le cas où $\alpha > 1$, nous avons $I_0 < i_0$ et le générateur se comporte donc bien comme un générateur de tension. On obtient classiquement :

$$U_g = E \qquad U_c = E(1-e^{-\frac{t}{\tau}}) \qquad i = \frac{E}{R}e^{-\frac{t}{\tau}}$$

On en tire les résultats : $\boxed{U_g = E \qquad U_R = Ri = E\,e^{-\frac{t}{\tau}}}$

2) Nous sommes maintenant dans le cas où le générateur se comporte comme un générateur de courant. Nous avons alors : $U_g = U_R + U_c = Ri_0 + \frac{i_0 t}{C} = Ri_0(1+\frac{t}{\tau})$. La relation $\alpha E = Ri_0$ donne :

$$\boxed{U_g = \alpha E(1+\frac{t}{\tau})}$$

3) Les résultats sont immédiats :

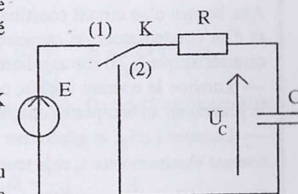
$$\boxed{U_g = E \qquad U_c = \frac{i_0 t_0}{C} = (1-\alpha)E}$$

Problème n°5

d'après Mines d'Albi, Alès, Douai, Nantes

Connaissances requises : circuit RC soumis à un échelon de tension, représentation de Thévenin et de Norton, utilisation de l'oscilloscope.

On considère le circuit ci-contre comprenant une résistance de valeur R, un condensateur de capacité C et une alimentation stabilisée de tension à vide E.



1) A l'instant de date t = 0, on place l'interrupteur K en position (1), le condensateur étant déchargé.

1.1) Exprimer la tension $U_C(t)$ aux bornes du condensateur en fonction de E, R, C et t ; on posera par la suite $\tau = RC$.

1.2) Donner l'allure de la courbe donnant U_C en fonction de t. On précisera la pente à l'origine.

2) Le condensateur est maintenant chargé : $U_C = E$. A l'instant t = 0, on place l'interrupteur sur la position (2).

2.1) Exprimer la tension $U_C(t)$ aux bornes du condensateur en fonction de E, R, C et t. En déduire que la courbe représentant les variations de $\ln(\frac{E}{U_C})$ en fonction du temps est une droite dont on exprimera le coefficient directeur en fonction de R et de C.

2.2) Données : R = 10 MΩ ; C = 10 µF ; E = 10 V.
On branche un voltmètre numérique (calibre 20 V) aux bornes du condensateur et on étudie la décharge du condensateur à partir de l'instant de date t = 0 où l'on place l'interrupteur K en position (2).

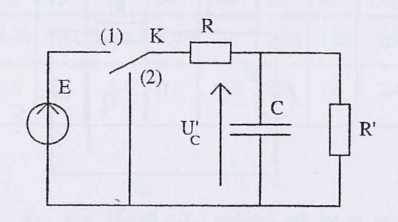
On relève les valeurs de $U_C(t)$ à différentes dates :

t(s)	5	10	15	20	30	45	60	90	120	150
$U_C(t)$	9,05	8,19	7,41	6,70	5,49	4,07	3,01	1,65	0,91	0,50

Tracer la courbe $\ln(\frac{E}{U_C}) = f(t)$.

Montrer que les résultats sont en accord avec la théorie à condition de considérer que le condensateur se décharge aussi dans le voltmètre modélisé par une résistance R' que l'on calculera.

3) On considère le circuit ci-dessous qui correspond au circuit du **1)** avec en plus le voltmètre placé aux bornes du condensateur ; le voltmètre est modélisé par une résistance R' ; à l'instant t = 0, on place l'interrupteur K en position (1), le condensateur étant déchargé.

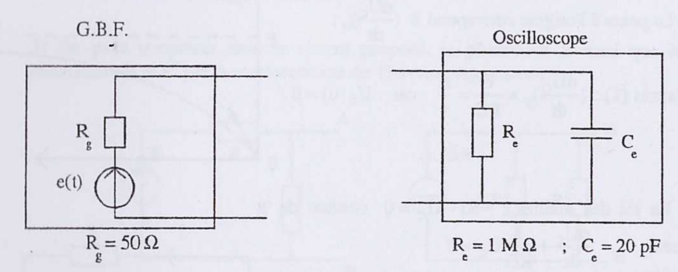


Montrer, en utilisant la représentation de Thévenin d'un générateur, que l'expression de $U_C'(t)$ s'obtient très rapidement à partir de l'expression de $U_C(t)$ du **1.1** ; on exprimera $U_C'(t)$ en fonction de E, R, R', C et t.

4) On souhaite visualiser sur un oscilloscope la courbe du **1)** de U_C en fonction de t lors de la charge du condensateur ; on choisit comme valeurs R = 10 kΩ et C = 10 nF. L'alimentation stabilisée est remplacée par un générateur basse fréquence (G.B.F.) ; l'oscilloscope est placé aux bornes du condensateur.

4.1) Justifier brièvement pourquoi les valeurs précédentes de R et de C de la question **2.2** (R = 10 MΩ ; C = 10 µF) ne sont pas satisfaisantes pour visualiser la charge du condensateur sur l'oscilloscope.

4.2) La sortie du G.B.F. et l'entrée de l'oscilloscope sont modélisées ci-dessous.

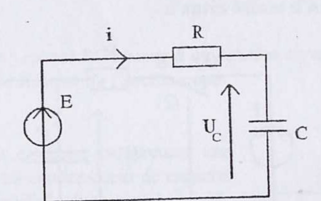


Justifier brièvement, compte tenu des limitations d'utilisation des différents appareils utilisés, le choix des valeurs de R et C.

4.3) Quel type de signal (sinusoïdal, triangulaire, carré, ...) faut-il choisir à la sortie du G.B.F. pour observer sur l'oscilloscope la charge du condensateur ?

4.4) Par un calcul rapide, donner un ordre de grandeur de la fréquence à utiliser pour observer pratiquement toute la charge du condensateur sur l'oscilloscope.

Corrigé



1.1) Appliquons la loi des mailles : $E - Ri - U_C = 0$ or $i = C\frac{dU_C}{dt}$ on en déduit l'équation différentielle vérifiée par $U_C(t)$: $\frac{dU_C}{dt} + \frac{1}{RC}U_C = \frac{E}{RC}$ (1)

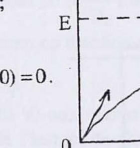
La solution générale s'écrit : $U_C(t) = Ae^{-\frac{t}{RC}} + B$.

B correspond à la solution particulière B = E et A se détermine par les conditions initiales : $U_C(0) = 0 \Rightarrow 0 = A + E \Rightarrow A = -E$ et en posant $\tau = RC$:

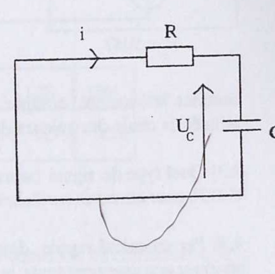
$$\boxed{U_C = E(1 - e^{-\frac{t}{\tau}})}$$

1.2) La pente à l'origine correspond à $(\frac{dU_C}{dt})_0$;

or d'après (1) : $(\frac{dU_C}{dt})_0 = \frac{E}{RC} = \frac{E}{\tau}$ car $U_C(0) = 0$.



2.1) La loi des mailles : $-Ri - U_C = 0$ conduit de même à $\frac{dU_C}{dt} + \frac{1}{RC}U_C = 0$



En la résolvant avec $U_C(0) = E$ on obtient :

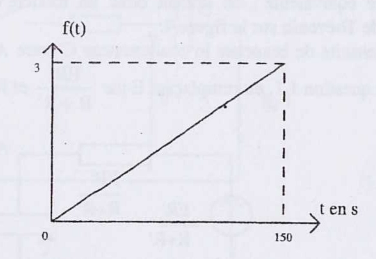
$$U_C = Ee^{-\frac{t}{\tau}}$$

En prenant le logarithme : $\ln(\frac{E}{U_C}) = \frac{t}{\tau}$; on a bien une droite de pente $\boxed{\frac{1}{\tau} = \frac{1}{RC}}$

2.2) On rajoute au tableau la ligne des valeurs de $\ln(\frac{E}{U_C})$:

t(s)	5	10	15	20	30	45	60	90	120	150
$U_C(t)$	9,05	8,19	7,41	6,70	5,49	4,07	3,01	1,65	0,91	0,50
$\ln(\frac{E}{U_C})$	0,1	0,2	0,3	0,4	0,6	0,9	1,2	1,8	2,4	3

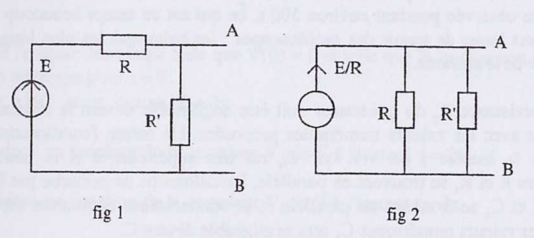
Courbe $\ln(\frac{E}{U_C}) = f(t)$:



On obtient une droite de pente 0,02 ; or la pente est égale à $1/\tau$; mais le condensateur se décharge à travers la résistance R et à travers le voltmètre de résistance R'. Ces deux résistances sont branchées en parallèle, avec la résistance équivalente $R_{eq} = \frac{RR'}{R+R'}$.

On a donc $0{,}02 = \frac{1}{\tau} = \frac{1}{R_{eq}C} = \frac{R+R'}{RR'C}$ on en déduit que $\boxed{R' = R = 10\,M\Omega}$

3) On peut remplacer dans le circuit proposé, le générateur E ainsi que les deux résistances R et R' par la représentation de Thévenin équivalente :



Sur la figure 2, le modèle de Thévenin, générateur idéal de tension E en série avec une résistance R, a été remplacé par le modèle de Norton, générateur de courant idéal $\frac{E}{R}$ en parallèle avec une résistance R.

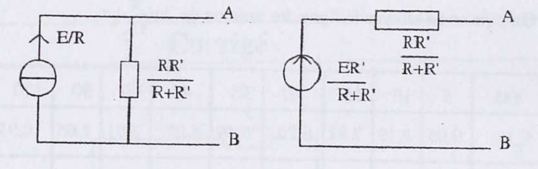
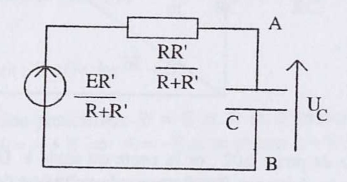


fig 3 fig 4

Sur la figure 3, les deux résistances R et R' en parallèles ont été remplacées par leur résistance équivalente ; on obtient donc un modèle de Norton qu'on transforme en modèle de Thévenin sur la figure 4.
Il suffit ensuite de brancher le condensateur C entre A et B et l'on se retrouve dans le cas de la question **1.1**, en remplaçant E par $\dfrac{ER'}{R+R'}$ et R par $\dfrac{RR'}{R+R'}$.



D'où : $$U_C = \frac{R'}{R+R'}E(1-e^{-\frac{(R+R')t}{RR'C}})$$

4.1) Pour bien voir la charge d'un condensateur il faut l'observer pendant un temps de l'ordre de 5τ ; or si on prend R = 10 MΩ et C = 10 µF, on aura τ = 100 s ; la charge devra être observée pendant environ 500 s, ce qui est un temps beaucoup trop long par rapport aux bases de temps des oscilloscopes ; les balayages les plus longs ne sont que de l'ordre de la seconde.

4.2) La résistance R_g du générateur doit être négligeable devant la résistance R, ce qui est le cas avec les valeurs numériques proposées. De même l'oscilloscope ne doit pas perturber la mesure ; on voit que R_e est très supérieure à R et comme les deux résistances R et R_e se trouvent en parallèle, l'oscilloscope ne perturbe pas la mesure. De même C et C_e se trouvent en parallèle et le condensateur équivalent est $C+C_e$; mais d'après les valeurs numériques C_e sera négligeable devant C.

4.3) Il faut choisir un signal carré qui correspond à une succession d'échelons (0, E) et d'échelons (E, 0).

4.4) Pendant une période du signal carré il faut pouvoir observer une charge et une décharge ; il faut donc qu'on ait environ $T = 10\tau = 10RC = 10^{-3}$ s. Il faut donc un signal carré de fréquence 1000 Hz ou moins.

Problème n°6

d'après Ecole de l'Air

Connaissances requises : dipôles R et C, circuit RC soumis à un échelon de tension.

On considère le circuit de la fig. 1 comprenant un interrupteur K, un générateur de tension $V_e(t)$, une résistance R et un condensateur de capacité C. La tension aux bornes du condensateur est désignée par V.

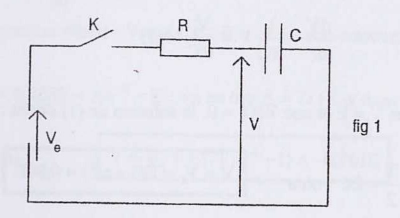


fig 1

La tension V_e appliquée est un signal rectangulaire de période T.
$V_e(t)$ est représentée sur la fig.2.

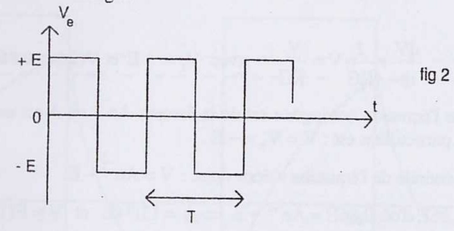


fig 2

On choisit l'origine des temps telle que V(0) = 0 et telle que la tension soit une fonction croissante du temps pour t = 0.
On pose $\tau = RC$ et on donne $T = 4\tau$

a) Déterminer, en fonction de E, la valeur V_1 de V à l'instant $t = 2\tau$.

b) Déterminer, en fonction de E, la valeur V_2 de V à l'instant $t = 4\tau$.

c) Déterminer, en fonction de E, la valeur V_3 de V à l'instant $t = 6\tau$.

d) Déterminer, en fonction de E, la valeur V_4 de V à l'instant $t = 8\tau$.

e) Sur un même diagramme, représenter les variations de V_e et de V en fonction du temps pour $0 < t < 8\tau$.

Commenter.

Corrigé

a) Intervalle $0 \le t \le \frac{T}{2}$

On a une courbe de charge du condensateur à travers R. La loi des mailles s'écrit :

$$V_e - Ri - V = 0 \quad \text{avec} \quad i = C\frac{dV}{dt}$$

d'où $\frac{dV}{dt} + \frac{1}{RC}V = \frac{V_e}{RC}$ (1)

En remarquant que $V_e = E$ et que $V(0) = 0$, la solution de (1) s'écrit : $V = E(1 - e^{-\frac{t}{\tau}})$.

Et donc pour $t = \frac{T}{2} = 2\tau$ on a $\boxed{V = V_1 = E(1 - e^{-2}) = 0{,}86E}$

b) Intervalle $2\tau \le t \le 4\tau$

La loi des mailles s'écrit toujours $V_e - Ri - V = 0$ et on retrouve l'équation différentielle :

$$\frac{dV}{dt} + \frac{1}{RC}V = \frac{V_e}{RC} \quad \text{avec } V_e = -E \text{ et } V(2\tau) = 0{,}86E$$

La solution de l'équation homogène est de la forme : $Ae^{-\frac{t}{\tau}}$ où A est une constante.
Une solution particulière est : $V = V_e = -E$.

La solution générale de l'équation s'écrit donc : $V = Ae^{-\frac{t}{\tau}} - E$.

Or $V(2\tau) = 0{,}86E$ d'où $0{,}86E = Ae^{-2} - E \Rightarrow A = 13{,}74E$ et $V = E(13{,}74e^{-\frac{t}{\tau}} - 1)$.

En remplaçant t par 4τ, on en déduit : $\boxed{V = V_2 = E(13{,}74e^{-4} - 1) = -0{,}75E}$

c) Intervalle : $4\tau \le t \le 6\tau$

L'équation différentielle est toujours $\frac{dV}{dt} + \frac{1}{RC}V = \frac{V_e}{RC}$ avec comme condition initiale $V(4\tau) = V_2 = -0{,}75E$ et $V_e = E$.

La solution de l'équation s'écrit : $V = Ae^{-\frac{t}{\tau}} + E$; A est une constante.

Or pour $t = 4\tau$, $V = -0{,}75E = Ae^{-4} + E \Rightarrow A = -95{,}5E$ et $V = E(1 - 95{,}5e^{-\frac{t}{\tau}})$.

D'où à l'instant $t = 6\tau$, $\boxed{V = V_3 = E(1 - 95{,}5e^{-6}) = 0{,}763E}$

d) Intervalle : $6\tau \le t \le 8\tau$

L'équation différentielle est toujours $\frac{dV}{dt} + \frac{1}{RC}V = \frac{V_e}{RC}$

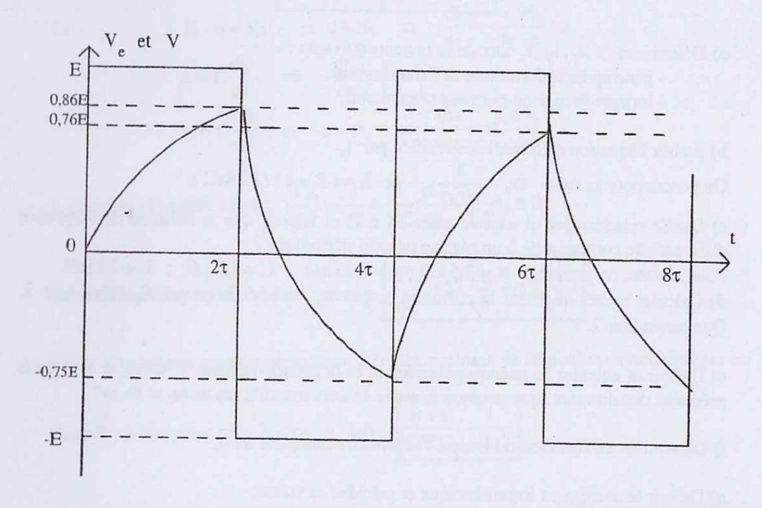
avec comme condition initiale $V(6\tau) = V_3 = 0{,}763E$ et dans cet intervalle $V_e = -E$.

La solution de l' équation s'écrit : $V = Ae^{-\frac{t}{\tau}} - E$; A est une constante.

Or pour $t = 6\tau$, $V = 0{,}763E = Ae^{-6} - E$; on en tire $A = 711E$ et donc $V = E(711e^{-\frac{t}{\tau}} - 1)$.

D'où à l'instant $t = 8\tau$, $\boxed{V = V_4 = E(711e^{-8} - 1) = -0{,}761E}$

e) Le graphique suivant représente les variations de V_e et de V pour $0 \le t \le 8\tau$:



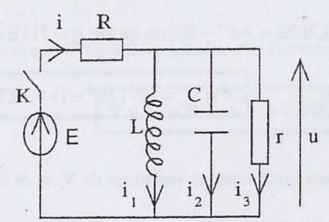
On constate que V(t) devient rapidement symétrique par rapport à 0.

Problème n°7

d'après Mines d'Alès

Connaissances requises : dipôles R, L, C ; circuit soumis à un échelon de tension ; résolution de l'équation différentielle du 2ème ordre.

On considère le circuit suivant, constitué d'une source idéale de tension E, de deux résistors de résistance R et r, d'un condensateur de capacité C et d'une bobine d'inductance L. Au départ le condensateur C n'est pas chargé et tous les courants sont nuls. On ferme l'interrupteur K à l'instant t = 0.



a) Déterminer u, i_1, i_2, i_3 aux deux instants suivants :
- juste après la fermeture de l'interrupteur.
- lorsque le régime permanent est établi.

b) Etablir l'équation différentielle vérifiée par i_3.
On posera pour la suite $\omega_0 = \frac{1}{\sqrt{LC}}$ et $\lambda = (R + r) / (2RrC)$

c) Quelle relation doit-il exister entre R, r, C et L pour que la solution de l'équation différentielle corresponde à un régime pseudo-périodique ?
Pour la suite, on prendra : $R = 2{,}5\ \text{k}\Omega$; $r = 1{,}25\ \text{k}\Omega$; $C = 1{,}0\ \mu\text{F}$; $L = 20\ \text{mH}$.

d) Calculer numériquement la pulsation propre ω_0, la période propre T_0, ainsi que λ. Que caractérise λ ?

e) Définir et calculer la pseudo-pulsation ω et la pseudo-période T. Compte tenu de la précision des données, que peut-on dire des valeurs numériques de ω_0 et de ω ?

f) Déterminer en fonction du temps, l'expression complète de i_3.

g) Définir le décrément logarithmique et calculer sa valeur.

h) Calculer le temps nécessaire pour que le régime permanent soit pratiquement établi dans le circuit.
On admettra que c'est le cas à partir du moment où l'amplitude de i_3 est toujours inférieure au millième de sa valeur maximale.

Corrigé

a) Juste après la fermeture de l'interrupteur, la bobine se comporte comme une résistance infinie et donc $i_1 = 0$; le condensateur se comporte comme un court-circuit et donc $u = 0$

$i_3 = 0$ et $i_2 = \frac{E}{R}$.

En régime permanent, les tensions et les courants doivent être constants ; or $i_2 = C\frac{du}{dt}$; comme u est constant, on en déduit que $i_2 = 0$. Les courants sont constants en régime permanent et donc $u = L\frac{di_1}{dt} = 0$; on en déduit que $ri_3 = 0$ et donc $i_3 = 0$ et $i_1 = \frac{E}{R}$.

	u	i_1	i_2	i_3
$t = 0^+$	0	0	E/R	0
t -> infini	0	E/R	0	0

b) La loi des noeuds s'écrit : $i = i_1 + i_2 + i_3 \Rightarrow \frac{di}{dt} = \frac{di_1}{dt} + \frac{di_2}{dt} + \frac{di_3}{dt}$ (1)

Or $E - u = Ri$ et $u = ri_3 \Rightarrow \frac{di}{dt} = -\frac{r}{R}\frac{di_3}{dt}$

$u = L\frac{di_1}{dt} \Rightarrow \frac{di_1}{dt} = \frac{u}{L} = \frac{r}{L}i_3$

$i_2 = C\frac{du}{dt}$ et $u = ri_3 \Rightarrow \frac{di_2}{dt} = rC\frac{d^2i_3}{dt^2}$

L'équation (1) s'écrit alors : $\frac{d^2i_3}{dt^2} + (\frac{1}{rC} + \frac{1}{RC})\frac{di_3}{dt} + \frac{1}{LC}i_3 = 0$

et en utilisant les notations de l'énoncé : $$\boxed{\frac{d^2i_3}{dt^2} + 2\lambda\frac{di_3}{dt} + \omega_0^2 i_3 = 0}$$

c) On a un régime pseudo-périodique si le discriminant de l'équation caractéristique est négatif ; il faut donc que $\lambda < \omega_0$ et donc $\boxed{\frac{R+r}{2rRC} < \frac{1}{\sqrt{LC}}}$

En prenant les valeurs numériques : $\frac{R+r}{2rRC} = 600$ et $\frac{1}{\sqrt{LC}} = 7071$; on voit donc qu'on est en régime pseudo-périodique.

d) La pulsation propre : $\boxed{\omega_0 = \frac{1}{\sqrt{LC}} = 7071\ \text{rad.s}^{-1}}$

La période propre : $T_0 = \boxed{\dfrac{2\pi}{\omega_0} = 8{,}88.10^{-4}\,s}$

$\lambda = 600\ s^{-1}$ caractérise l'amortissement des oscillations.

e) Si Δ est le discriminant de l'équation caractéristique, la pseudo-pulsation ω est définie par $\omega = \dfrac{\sqrt{-\Delta}}{2}$ soit $\omega = \sqrt{\omega_0^2 - \lambda^2}$; on en déduit $\boxed{\omega = 7045\ rad.s^{-1}}$

La pseudo-période : $\boxed{T = \dfrac{2\pi}{\omega} = 8{,}92.10^{-4}\ s}$

Puisque les données sont fournies avec deux chiffres significatifs, on peut confondre les valeurs numériques de ω et de ω_0.

f) La solution de l'équation différentielle du second ordre, sans second membre, avec un discriminant négatif s'écrit : $i_3(t) = e^{-\lambda t}(A\cos(\omega t) + B\sin(\omega t))$ avec $\lambda = 600$.
A et B sont des constantes à déterminer avec les conditions initiales.
En $t = 0$: $i_3 = 0$; et donc $A = 0$.
Par ailleurs, d'après b) : $i_2 = C\dfrac{du}{dt}$ or $u = ri_3$ d'où $i_2 = Cr\dfrac{di_3}{dt}$ et $\dfrac{di_3}{dt} = \dfrac{i_2}{rC}$;
or à l'instant initial $i_2 = \dfrac{E}{R}$ et donc $(\dfrac{di_3}{dt})_0 = \dfrac{E}{rRC}$ soit $B\omega = \dfrac{E}{rRC}$ et $B = \dfrac{E}{rRC\omega}$

Avec les données numériques : $B = 4{,}54.10^{-5}E$.

La solution s'écrit donc : $\boxed{i_3 = 4{,}54.10^{-5}\,E\,e^{-600t}\sin(7045t)}$

g) Le décrément logarithmique est donné par $\boxed{\delta = \lambda T = 0{,}535}$

h) La fonction $i_3(t)$ part de zéro à l'instant $t = 0$ et redevient nulle en régime permanent.
Elle passe par un maximum pour $\dfrac{di_3}{dt} = 0$; et donc en dérivant :

$$0 = -600e^{-600t}\sin(7045t) + 7045e^{-600t}\cos(7045t)$$

La première solution est donnée par : $\tan(7045t) = \dfrac{7045}{600} \Rightarrow t = 2{,}1.10^{-4}s.$

le premier maximum de i_3 est alors : $i_{3max} = 4{,}54.10^{-5}Ee^{-600t}\sin(7045t) = 4.10^{-5}E$

L'amplitude de i_3 doit être inférieure au millième de sa valeur maximale, atteinte au premier maximum.

Il faut donc que $4{,}54.10^{-5}Ee^{-600t} < \dfrac{4.10^{-5}E}{1000}$

Et donc $\boxed{t > 11{,}7\ ms}$ pour que l'amplitude de i_3 soit toujours inférieure au millième de sa valeur maximale.

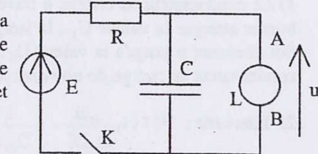
Problème n°8

d'après DEUG

Connaissances requises : circuit RC soumis à un échelon de tension ; représentation de Thévenin et de Norton.

On se propose de mesurer la résistance R, très élevée, d'un conducteur ohmique, en exploitant le phénomène d'oscillations de relaxation d'une lampe au néon.

Le montage : On considère le montage de la figure ci-contre, comportant une source idéale de tension E, un interrupteur K, un résistor de résistance R, un condensateur de capacité C et une petite lampe au néon, notée L.



La lampe au néon se comporte comme un résistor de résistance R_L quand elle est allumée et comme une résistance infinie quand elle est éteinte.
La tension à ses bornes est u ; lorsque u croît, à partir de zéro, la lampe est éteinte ; lorsque u atteint la valeur U_1 = 100 V , la lampe s'allume ; ensuite si on diminue u à partir de U_1 la lampe reste allumée et s'éteint lorsque u atteint la valeur U_0 = 80 V . U_1 est la tension d'amorçage et U_0 la tension d'extinction.
Observations : Le condensateur est déchargé. A t = 0 , on ferme l'interrupteur. La lampe se met à clignoter avec une fréquence f ; on note T, l'intervalle de temps entre deux éclairs.

1) Sans faire de calculs, en quelques lignes, expliquer le phénomène observé.

2) Soit t_1, l'instant du premier allumage de la lampe.
Déterminer l'expression de u(t) pour $0 < t < t_1$.
Déterminer littéralement, l'expression de t_1, en fonction de R, C, U_1 et E.

3) Soit t_2, l'instant de la première extinction.
Dans la suite de l'exercice on posera : $\lambda = \dfrac{1}{1 + \dfrac{R}{R_L}}$

Déterminer l'expression de u(t) pour $t_1 < t < t_2$.
Déterminer littéralement, l'expression de t_2, en fonction de R, C, E, U_0, U_1 et λ.

4) Soit t_3, l'instant du second allumage.
Déterminer l'expression de u(t) pour $t_2 < t < t_3$.
Déterminer l'expression de t_3 en fonction de R, C, E, U_0, U_1 et λ.

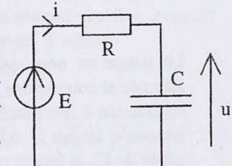
5) Période des oscillations.
Tracer l'allure de la courbe de u(t) pour $0 < t < t_3$.
Que se passera-t-il ensuite pour $t > t_3$?
Donner la période T des éclairs en fonction de R, C, E, U_0, U_1 et λ.
6) Mesure de la résistance.

On donne : fréquence des éclairs $f = 40$ éclairs.min^{-1} ; $C = 0.2\ \mu F$; $E = 130$ V ; $U_0 = 80$ V ; $U_1 = 100$ V.
Calculer la valeur de la résistance R. On rappelle que R est très grande devant R_L.

Corrigé

1) Le condensateur se charge à travers la résistance R, jusqu'à ce que la tension u à ses bornes atteigne la valeur U_1 ; la lampe néon s'allume alors et devient conductrice ce qui fait diminuer u jusqu'à la valeur U_0 ; la lampe s'éteint alors et n'est plus conductrice ; le condensateur se charge de nouveau jusqu'à U_1 ; la lampe s'allume ...etc...

2) Intervalle : $0 < t < t_1$.



Le condensateur n'est pas chargé ; la lampe n'est pas conductrice ; on a donc un simple circuit de charge d'un condensateur C à travers une résistance R. En appliquant la loi des mailles, on a l'équation : $E - Ri - u = 0$; or $i = C\dfrac{du}{dt}$

d'où l'équation différentielle du premier ordre :

$$\frac{du}{dt} + \frac{1}{RC}u = \frac{E}{RC}$$

La solution générale de l'équation homogène est : $Ae^{-\frac{t}{RC}}$ où A est une constante.
Une solution particulière de l'équation complète est : $u = E$.

La solution générale de l'équation différentielle s'écrit donc : $u = Ae^{-\frac{t}{RC}} + E$.

Or $u(0) = 0$; on en déduit que $A = -E$ et donc : $u(t) = E(1 - e^{-\frac{t}{RC}})$.

A l'instant $t = t_1$, lors du premier allumage de la lampe néon, $u = U_1 = E(1 - e^{-\frac{t_1}{RC}})$; on en tire que

$$\boxed{t_1 = -RC\ln(1 - \frac{U_1}{E})}$$

3) Intervalle : $t_1 < t < t_2$. La lampe est allumée et le circuit peut se représenter :

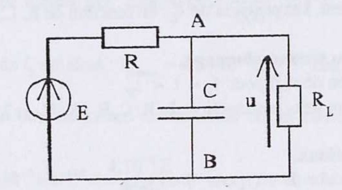


fig.1

En procédant comme dans le problème n°5, question 3) et en passant par la représentation de Thévenin et de Norton, nous pouvons remplacer le montage, par le montage suivant :

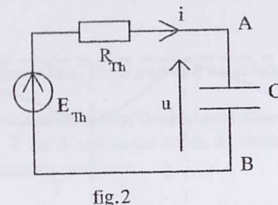


fig.2

Avec $R_{Th} = \dfrac{RR_L}{R + R_L} = \lambda R$ et $E_{Th} = \dfrac{ER_L}{R + R_L} = \lambda E$.

On peut écrire l'équation différentielle : $\dfrac{du}{dt} + \dfrac{1}{R_{Th}C}u = \dfrac{E_{Th}}{R_{Th}C}$.

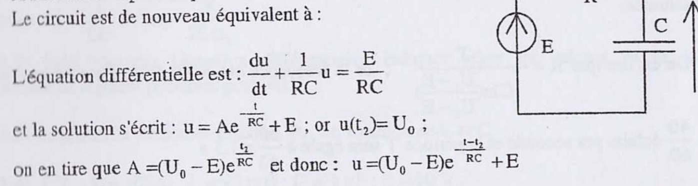
La solution générale s'écrit : $u(t) = Ae^{-\frac{t}{R_{Th}C}} + E_{Th}$.

On détermine A avec la condition : $u(t_1) = U_1$. D'où $A = (U_1 - E_{Th})e^{\frac{t_1}{R_{Th}C}}$ et la solution s'écrit : $u(t) = (U_1 - E_{Th})e^{-\frac{t - t_1}{R_{Th}C}} + E_{Th}$ ou en remplaçant : $u(t) = (U_1 - E\lambda)e^{-\frac{t - t_1}{\lambda RC}} + \lambda E$

A l'instant $t = t_2$, on aura $u = U_0$ (première extinction) ; $U_0 = (U_1 - E\lambda)e^{-\frac{t_2 - t_1}{\lambda RC}} + \lambda E$

On en tire : $t_2 - t_1 = -\lambda RC\ln(\dfrac{U_0 - \lambda E}{U_1 - \lambda E})$ soit $\boxed{t_2 = -\lambda RC\ln(\dfrac{U_0 - \lambda E}{U_1 - \lambda E}) - RC\ln(1 - \dfrac{U_1}{E})}$

4) Intervalle : $t_2 < t < t_3$



A l'instant $t = t_2$ la lampe vient de s'éteindre et on a $u = U_0$.
Le circuit est de nouveau équivalent à :

L'équation différentielle est : $\dfrac{du}{dt} + \dfrac{1}{RC}u = \dfrac{E}{RC}$

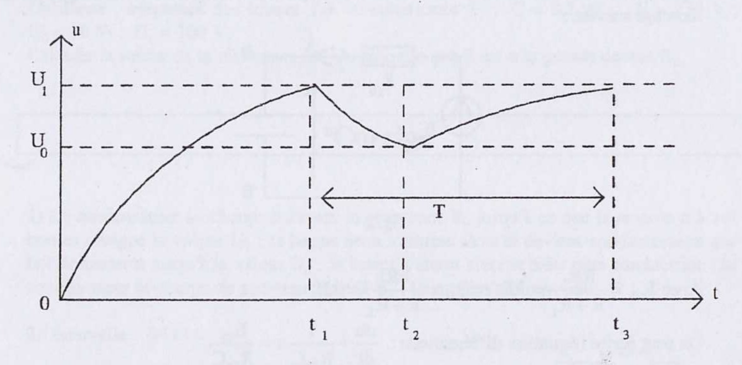
et la solution s'écrit : $u = Ae^{-\frac{t}{RC}} + E$; or $u(t_2) = U_0$;

on en tire que $A = (U_0 - E)e^{\frac{t_2}{RC}}$ et donc : $u = (U_0 - E)e^{-\frac{t - t_2}{RC}} + E$

A l'instant $t = t_3$ on aura $u = U_1$ et la lampe s'allume de nouveau (second allumage). On aura donc : $U_1 = (U_0 - E)e^{-\frac{t_3 - t_2}{RC}} + E$ et $t_3 = t_2 - RC\ln(\dfrac{U_1 - E}{U_0 - E})$ soit en remplaçant t_2 par son expression :

$$\boxed{t_3 = -RC\ln(1 - \frac{U_1}{E}) - \lambda RC\ln(\frac{U_0 - \lambda E}{U_1 - \lambda E}) - RC\ln(\frac{U_1 - E}{U_0 - E})}$$

5) Allure de la courbe de u(t).



A partir de t_3 le phénomène va se répéter avec la période $T = t_3 - t_1$; la tension aux bornes de la lampe va osciller entre U_1 et U_0.

La période des éclairs est : $\boxed{T = t_3 - t_1 = -\lambda RC\ln(\frac{U_0 - \lambda E}{U_1 - \lambda E}) - RC\ln(\frac{U_1 - E}{U_0 - E})}$

6) On rappelle que R est beaucoup plus grande que R_L et donc $\lambda = \frac{1}{1+\frac{R}{R_L}}$ tend vers 0.

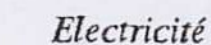
L'expression de la période s'écrit alors : $T = -RC\ln(\frac{U_1 - E}{U_0 - E})$; la durée pendant laquelle

la lampe est éteinte est donc beaucoup plus grande que celle pendant laquelle elle est allumée.

On en tire que $R = -\frac{T}{C\ln(\frac{U_1 - E}{U_0 - E})}$; or la fréquence est de 40 éclairs par minute, soit

$\frac{40}{60}$ éclairs par seconde et la période T sera égale à $\frac{60}{40} = 1{,}5$ s.

Avec les valeurs numériques proposées dans l'énoncé, on obtient : $\boxed{R = 1{,}46.10^7\ \Omega}$
Cette méthode permet de mesurer les grandes résistances.

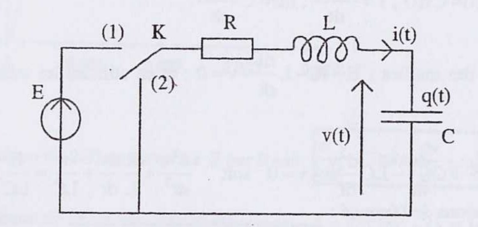


Problème n°9

d'après ENSAM

Connaissances requises : circuit RLC série soumis à un échelon de tension.

On considère le montage ci-dessous. L est l'inductance d'une bobine parfaite, C est la capacité d'un condensateur, R est la résistance totale du circuit, K est un interrupteur et E, un générateur parfait de tension continue.



On appelle :
q(t), la charge du condensateur à l'instant t.
i(t), l'intensité dans le circuit à l'instant t.
v(t), la tension aux bornes du condensateur à l'instant t.

1) En tenant compte des conventions indiquées sur le schéma, écrire les relations entre q(t) et v(t), entre q(t) et i(t) et entre i(t) et v(t).

2) Le condensateur est initialement déchargé. A l'instant t = 0, on met l'interrupteur K en position (1).

2.1) Etablir l'équation différentielle à laquelle satisfait v(t) en fonction de E, ω_0 et m avec $\omega_0^2 = \frac{1}{LC}$ et $m = \frac{R}{2L\omega_0}$.

2.2) Sans résoudre l'équation différentielle, indiquer selon les valeurs de m, les différents régimes possibles pour v(t).

2.3) Exprimer la résistance critique, R_C, en fonction de L et C.

2.4) A.N. : R = 100 Ω ; L = 40 mH ; C = 1 μF ; E = 10 V.
Calculer ω_0, m et R_C.
Dessiner l'allure de la variation de v(t) en fonction de t.
Dans la suite du problème, on gardera les valeurs numériques ci-dessus.

3) Lorsque le régime transitoire a disparu, on met l'interrupteur en position (2) et on prend cet instant comme nouvelle origine des temps.

3.1) Ecrire l'équation différentielle à laquelle satisfait v(t).

3.2) Résoudre cette équation et déterminer <u>entièrement</u> l'expression de v(t). Dessiner <u>l'allure</u> de la variation de v(t) en fonction de t.

3.3) Déterminer numériquement le décrément logarithmique.

Corrigé

1) On a $q(t)= Cv(t)$; $i=\frac{dq(t)}{dt}$; $i(t)= C\frac{dv(t)}{dt}$.

2.1) La loi des mailles : $E-Ri-L\frac{di}{dt}-v=0$; et en utilisant les relations précédentes, on

obtient : $E-RC\frac{dv}{dt}-LC\frac{d^2v}{dt^2}-v=0$ soit $\frac{d^2v}{dt^2}+\frac{R}{L}\frac{dv}{dt}+\frac{v}{LC}=\frac{E}{LC}$ et en remplaçant par les notations de l'énoncé :

$$\boxed{\frac{d^2v}{dt^2}+2m\omega_0\frac{dv}{dt}+\omega_0^2v=\omega_0^2E}$$

2.2) Le discriminant de l'équation caractéristique est : $\Delta=4m^2\omega_0^2-4\omega_0^2=4\omega_0^2(m^2-1)$.

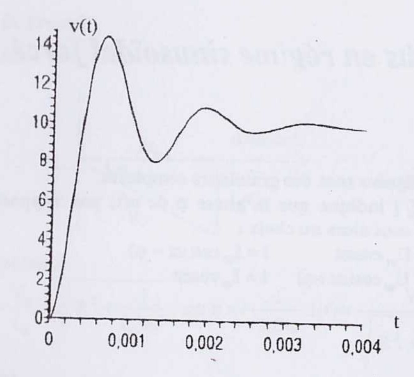
Si $\Delta<0 \Rightarrow m<1$ alors on a un régime pseudo-périodique ; le condensateur va se charger sous la tension E en effectuant des oscillations amorties.
Si $\Delta=0 \Rightarrow m=1$; on est au régime critique ; le condensateur atteint la tension E, le plus rapidement possible sans oscillations.
Si $\Delta>0 \Rightarrow m>1$; on est en régime apériodique ; le condensateur atteint la tension E sans oscillations.

2.3) La résistance critique correspond à la valeur de R pour laquelle on est au régime critique, soit m = 1 et donc

$$\boxed{R_C=2L\omega_0=2\sqrt{\frac{L}{C}}}$$

2.4) $\omega_0=\frac{1}{\sqrt{LC}}=5000$ rad.s^{-1} ; $m=\frac{R}{2L\omega_0}=0{,}25$; $R_C=2\sqrt{\frac{L}{C}}=400\ \Omega$.

On voit que m < 1 et on est donc en régime pseudo-périodique. L'allure de la courbe de v(t) se trouve à la page suivante ; elle a été tracé pour E = 10 V. La tension v part de 0 à l'instant initial, avec une pente nulle car $i(t)= C\frac{dv(t)}{dt}$; or au départ le courant est nul par continuité dans la bobine, donc $\left(\frac{dv}{dt}\right)_0=0$. La tension v(t) monte ensuite, en oscillant, pour atteindre la valeur finale E. Il s'agit de la charge oscillante du condensateur.



3.1) Dans l'équation du **2.1)** on remplace E par 0 soit $\boxed{\frac{d^2v}{dt^2}+2m\omega_0\frac{dv}{dt}+\omega_0^2v=0}$

3.2) Le discriminant de l'équation caractéristique est : $\Delta=4\omega_0^2(m^2-1)$ et les racines de l'équation s'écrivent : $r_1, r_2=\frac{-2m\omega_0\pm\sqrt{4\omega_0^2(m^2-1)}}{2}=-m\omega_0\pm\omega_0\sqrt{m^2-1}$

En remplaçant par les valeurs numériques : r_1 , $r_2=-1250\pm4841i$ avec $i^2=-1$

La solution s'écrit alors : $v(t)=Ae^{-1250t}\cos(4841t+\varphi)$ avec A et φ des constantes à déterminer avec les conditions initiales ; 4841 représente la pseudo-pulsation ω.

En t = 0 on a v = E et donc $E=A\cos(\varphi)=10$.

On a également, par continuité, i(0) = 0 soit $\left(\frac{dv}{dt}\right)_0=0$ puisque $i=C\frac{dv}{dt}$.

Soit : $-1250\cos(\varphi)-4841\sin(\varphi)=0$ d'où $\tan(\varphi)=-0{,}258$ et $\varphi=-0{,}25$ rad

On en déduit : A = 10,32

La solution s'écrit : $\boxed{v(t)=10{,}32e^{-1250t}\cos(4841t-0{,}25)}$

3.3) Soit t_1 un instant où v(t) est maximum : $v(t_1)=10{,}32e^{-1250t_1}\cos(4841t_1-0{,}25)$
v(t) sera de nouveau maximum en t_1+T : $v(t_1+T)=10{,}32e^{-1250(t_1+T)}\cos(4841t_1-0{,}25)$
mais T est la pseudo-période et donc $\cos(4841t_1-0{,}25)=\cos(4841(t_1+T)-0{,}25)$

Le décrément logarithmique est $\boxed{\delta=\ln\left(\frac{v(t_1)}{v(t_1+T)}\right)=1250T=1250\frac{2\pi}{\omega}=1{,}62}$

Circuits en régime sinusoïdal forcé

Rappels :

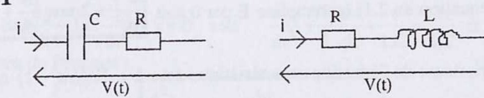
---- Les grandeurs soulignées sont des grandeurs complexes.

---- La formule $\underline{u} = \underline{Z}\,\underline{i}$ indique que la phase φ de u(t) par rapport à i(t) vaut arg $\underline{Z}$. Les expressions sont alors au choix :

$u = U_m \cos\omega t \qquad i = I_m \cos(\omega t - \varphi)$

ou $u = U_m \cos(\omega t + \varphi) \qquad i = I_m \cos\omega t$

Exercice 1



En utilisant successivement les impédances complexes et la méthode de Fresnel, calculer les impédances Z des deux dipôles et préciser dans chaque cas la phase de l'intensité i par rapport à la tension $V(t) = V_m \cos\omega t$. En déduire les expressions littérales des intensités i(t).

Impédances complexes

a) Circuit RC

L'impédance vaut : $\underline{Z} = R + \dfrac{1}{jC\omega} \Rightarrow Z = \sqrt{R^2 + \dfrac{1}{C^2\omega^2}}$ et $\tan\varphi = -\dfrac{1}{RC\omega}$.

L'expression de i(t) est donc : $$i(t) = \frac{V_m}{\sqrt{R^2 + \dfrac{1}{C^2\omega^2}}}\cos(\omega t - \varphi)$$

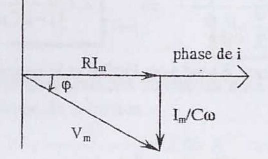
b) Circuit RL

L'impédance vaut $\underline{Z} = R + jL\omega \Rightarrow Z = \sqrt{R^2 + L^2\omega^2}$ et $\tan\varphi = \dfrac{L\omega}{R}$.

L'expression de i(t) est donc : $$i(t) = \frac{V_m}{\sqrt{R^2 + L^2\omega^2}}\cos(\omega t - \varphi)$$

Méthode de Fresnel

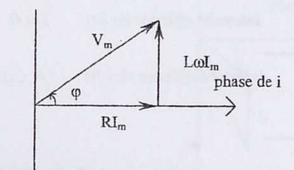
a) Circuit RC



D'où les résultats :

$$Z = \frac{V_m}{I_m} = \sqrt{R^2 + \frac{1}{C^2\omega^2}},\ \tan\varphi = -\frac{1}{RC\omega},\ i(t) = \frac{V_m}{\sqrt{R^2 + \dfrac{1}{C^2\omega^2}}}\cos(\omega t - \varphi)$$

b) Circuit RL



D'où les résultats :

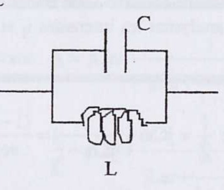
$$Z = \frac{U_m}{I_m} = \sqrt{R^2 + L^2\omega^2},\ \tan\varphi = \frac{L\omega}{R},\ i(t) = \frac{V_m}{\sqrt{R^2 + L^2\omega^2}}\cos(\omega t - \varphi)$$

Remarque

Il est important de bien connaître la technique des constructions de Fresnel. Si en général l'utilisation des complexes permet des calculs plus rapides, dans certains cas seule la méthode de Fresnel permet d'obtenir rapidement le résultat. De plus, beaucoup de phénomènes sont physiquement plus compréhensibles en utilisant cette méthode graphique.

Exercice 2

Calculer l'impédance Z de ce montage. Que se passe-t-il si on l'alimente avec une tension de pulsation $\omega_0 = \dfrac{1}{\sqrt{LC}}$?

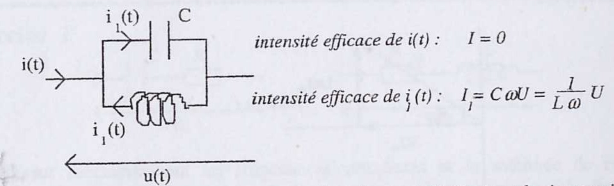


Nous avons : $\frac{1}{\underline{Z}} = jC\omega + \frac{1}{jL\omega} = \frac{1-LC\omega^2}{jL\omega} \Rightarrow$ $Z = \frac{L\omega}{|1-LC\omega^2|}$

Si $\omega = \omega_0 = \frac{1}{\sqrt{LC}}$, alors l'impédance Z tend vers l'infini et le courant sera nul pour toute tension appliquée au dipôle.

Remarque

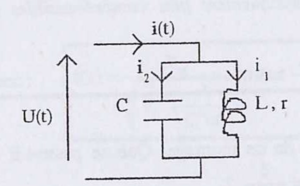
Un tel montage est appelé "circuit bouchon". En fait, le courant tourne en rond dans L et C car les impédances sont opposées ($\underline{Z}_L = -\underline{Z}_C$ puisque $jL\omega = -\frac{1}{jC\omega}$). Si on applique une tension efficace U au bornes du dipôle, nous avons alors le phénomène suivant :



Notons que le dipôle ne consomme aucune énergie car i=0. Ceci est logique puisque ni C, ni L, n'en consomment.

Exercice 3

Un condensateur de capacité C = 20 µF est placé en dérivation sur une self de résistance r = 10 Ω et d'auto-inductance L = 0,3 H. On applique entre ses bornes une tension alternative de fréquence 50 Hz et de valeur efficace U = 100 V.



1) Calculer directement l'intensité efficace I traversant le dipôle.
2) Retrouver ce résultat en analysant les intensités i_1 et i_2 parcourant chaque branche du dipôle.

1) Nous avons : $I = \frac{U}{Z}$ avec $\frac{1}{\underline{Z}} = jC\omega + \frac{1}{jL\omega + r} = \frac{(1-LC\omega^2) + jrC\omega}{jL\omega + r}$

On en tire : $Z = \sqrt{\frac{L^2\omega^2 + r^2}{(1-LC\omega^2)^2 + r^2C^2\omega^2}}$ AN) Z = 230 Ω

D'où : $I = \frac{U}{Z} = 0,44$ A

2) Dans les différentes branches du circuit, nous avons :

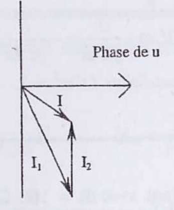
---- Dans la branche de la bobine :

$$I_1 = \frac{U}{\sqrt{L^2\omega^2 + r^2}} = 1,06 \text{ A} \quad \tan\varphi = \frac{L\omega}{r} \Rightarrow \varphi = 83,9°$$

---- Dans la branche du condensateur :

$$I_2 = C\omega U = 0,63 \text{ A} \quad \tan\varphi = -\infty \Rightarrow \varphi = -90°$$

La construction de Fresnel des intensités est alors :

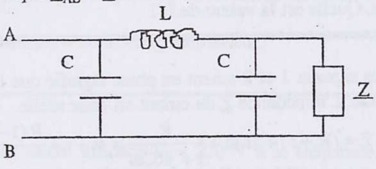


La construction de I permet de calculer sa valeur :

$$I = \sqrt{(I_1 \cos 83,9)^2 + (I_1 \sin 83,9 - I_2)^2} = 0,44 \text{ A}$$

Exercice 4

On considère le circuit ci-contre qui est alimenté par une tension de pulsation ω. Calculer la valeur de $\underline{Z}$ pour que $\underline{Z}_{AB} = \underline{Z}$.



L'admittance $\underline{A}$ du montage vaut : $\underline{A} = jC\omega + \frac{1}{jL\omega + \frac{\underline{Z}}{1 + jC\omega\underline{Z}}}$. Si on veut que $\underline{A} = \frac{1}{\underline{Z}}$,

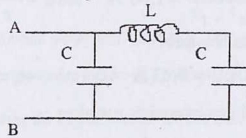
il faut donc résoudre l'équation : $\frac{1}{\underline{Z}} = jC\omega + \frac{1}{jL\omega + \frac{\underline{Z}}{1 + jC\omega\underline{Z}}}$

Les calculs aboutissent à $jC\omega \underline{Z}^2(2 - LC\omega^2) = jL\omega$ d'où l'on tire :

$$Z = \sqrt{\frac{L}{C(2 - LC\omega^2)}}$$

Remarque

Dans le cas $LC\omega^2 = 2$, l'impédance Z est infinie et par suite Z_{AB} aussi. On peut vérifier la validité de ce résultat en constatant que le circuit est alors :

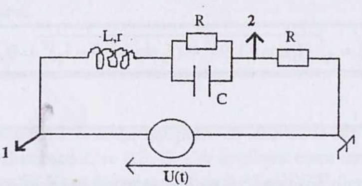


Ce circuit bouchonne pour $jL\omega + \frac{1}{jC\omega} = -\frac{1}{jC\omega}$ ($\underline{Z}_1 = -\underline{Z}_2$: voir remarque exercice 2).

Cela correspond bien à la condition $LC\omega^2 = 2$.

Exercice 5

On réalise le montage suivant avec R = 100 Ω et C = 10 µF. Les contacts 1 et 2 correspondent au branchement d'un oscillographe bicourbe.



Pour une fréquence de 180 Hz , on constate que les signaux observés à l'oscillographe sont en phase. Quelle est la valeur de L ?

Le fait que les signaux 1 et 2 soient en phase signifie que la phase entre l'intensité et la tension est nulle. L'impédance $\underline{Z}$ du circuit est donc réelle.

$$\underline{Z} = (R + r) + jL\omega + \frac{R}{1 + jRC\omega} = R + r + \frac{R(1 - LC\omega^2) + jL\omega}{1 + jRC\omega}$$

Pour que $\underline{Z}$ soit réelle, il faut que $\frac{R(1 - LC\omega^2) + jL\omega}{1 + jRC\omega}$ le soit, donc que les arguments du numérateur et du dénominateur soient identiques. On doit ainsi avoir :

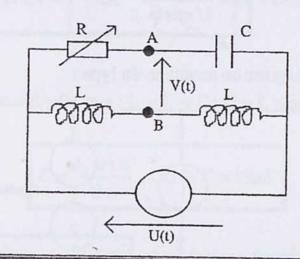
$$\tan\varphi = \frac{L\omega}{R(1 - LC\omega^2)} = RC\omega$$

On en tire facilement :

$$L = \frac{R^2C}{1 + R^2C^2\omega^2} \quad AN)\ L = 44 \text{ mH}$$

Exercice 6

Le montage suivant, alimenté par une tension sinusoïdale, est appelé montage déphaseur. Justifier ce nom en étudiant la tension V(t) entre les points A et B.



Les potentiels en A et B sont facilement calculables en utilisant la technique du pont diviseur de tension.

$$\underline{V}_A = \frac{\frac{1}{jC\omega}}{R + \frac{1}{jC\omega}}\underline{U} \Rightarrow \underline{V}_A = \frac{1}{1 + jRC\omega}\underline{U} \qquad \underline{V}_B = \frac{jL\omega}{2jL\omega}\underline{U} \Rightarrow \underline{V}_B = \frac{\underline{U}}{2}$$

On en tire : $\underline{V} = \underline{V}_A - \underline{V}_B = \frac{1}{2}\left(\frac{2}{1 + jRC\omega} - 1\right)\underline{U}$

soit : $$\underline{V} = \frac{1}{2}\frac{1 - jRC\omega}{1 + jRC\omega}\underline{U}$$

Le complexe $\frac{1 - jRC\omega}{1 + jRC\omega}$ est de module égal à 1 et d'argument $\varphi = -2\tan^{-1}(RC\omega)$. Il en résulte que l'amplitude de V(t) vaut $V_m = \frac{1}{2}U_m$ pour toute valeur de R et que, à ω fixée, la phase φ de V(t) par rapport à U(t) est ajustable en modifiant la valeur de R :

Ce montage correspond donc bien à un montage déphaseur.

Exercice 7

EDF fournit une tension de valeur efficace U = 220 V à la fréquence de 50 Hz. Un particulier utilise chez lui un moteur de puissance P = 1 kW, de type inductif et de facteur de puissance cos φ = 0,6.

1) Calculer l'intensité efficace I du courant fourni par EDF .

2) On cherche à minimiser la valeur de I tout en gardant le bon fonctionnement du moteur. Pour cela on dispose d'un lot de résistors, de bobines et de condensateurs de différentes valeurs.

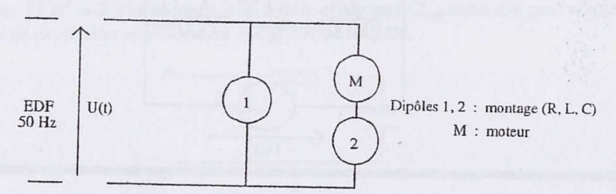
a) Quel montage doit-on réaliser avec le moteur ? Préciser la nature du dipôle utilisé, la valeur de l'intensité minimale et donner le facteur de puissance du montage global.

b) Quel est l'intérêt pour EDF de minimiser ainsi I ?

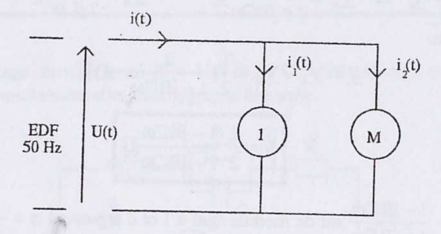
1) La puissance consommée par le moteur est telle que : $P = U\,I\cos\varphi$. D'où :

$$\boxed{I = \frac{P}{U\cos\varphi} \quad \text{AN) } I = 7{,}6\ \text{A}}$$

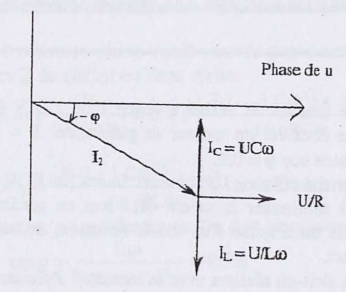
2) A priori, on peut imaginer un montage du type :



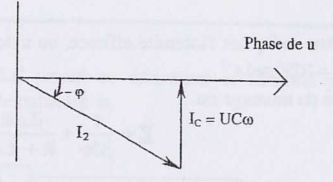
Si l'on ne veut pas perturber le fonctionnement du moteur, il ne faut rien mettre en série avec lui car sinon la tension efficace à ses bornes ne serait pas égale à 220 V. Le seul type de montage à utiliser est donc du type :



Le moteur étant du type inductif, la phase φ de U(t) par rapport à $i_2(t)$ est positive et $\cos\varphi = 0{,}6$ donne $\varphi = 53{,}1°$. La construction de Fresnel des intensités $\underline{i} = \underline{i}_1 + \underline{i}_2$ donne selon la nature du dipôle R ou L ou C :



La construction montre qu'il faut utiliser un condensateur pour diminuer l'intensité I. L'intensité minimale sera obtenue pour la construction suivante :



Pour cela, il faut une capacité telle que : $I_1 = I_c = C\omega U = I_2 \sin|\varphi|$. On en tire :

$$\boxed{C = \frac{I_2 \sin\varphi}{U\omega} \quad \text{AN) } C = 88\,\mu\text{F}}$$

Nous aurons alors $\boxed{I = I_2\cos\varphi = 4{,}6\ \text{A}}$ et un facteur de puissance $\boxed{\cos\varphi' = 1}$

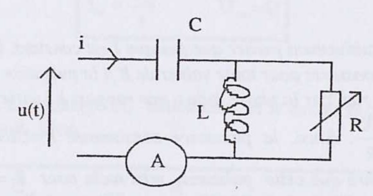
b) Pour EDF, le fait de minimiser I est très important car les pertes en ligne (pertes par effet Joule dans les lignes d'alimentation) sont proportionnelles à I^2. Ici par exemple, on peut voir que le fait de monter en dérivation un condensateur de 88 µF permettrait à EDF de diminuer ces pertes d'un facteur 2,7.

Remarque

EDF taxe tout dispositif industriel présentant un facteur de puissance inférieur à 0,8. Comme la plupart des moteurs utilisent des bobinages et sont donc du type inductif, les entreprises branchent des condensateurs en parallèle avec les machines de manière à obtenir un facteur de puissance correct au niveau du branchement EDF.

Exercice 8

On considère le dipôle suivant alimenté par une tension sinusoïdale de tension efficace 10 volts.



Pour la pulsation $\omega_0 = 1050\ \text{rad.s}^{-1}$, l'ampèremètre A indique une intensité de 100 mA, et ceci quelle que soit la valeur de R. Quelles sont les valeurs de L et C ?

L'ampèremètre indiquant l'intensité efficace, on a donc I =100 mA pour toute valeur de R à $\omega = \omega_0 = 1050\,\text{rad.s}^{-1}$.
L'impédance du montage est :

$$\underline{Z} = \frac{1}{jC\omega} + \frac{jL\omega R}{R + jL\omega}$$

Plutôt que de calculer le module de $\underline{Z}$ et d'exploiter le fait que celui-ci est indépendant de R à la pulsation ω_0 (les calculs seront visiblement très lourds), il vaut mieux exploiter cette indépendance dans des cas simples donnant des résultats rapides.

--- Pour R = 0, on obtient $Z = \frac{1}{C\omega_0} = \frac{U}{I}$. On en tire la valeur de C :

$$\boxed{C = \frac{I}{\omega_0 U} = 9{,}52\,\mu F}$$

--- Pour R infinie, on obtient $Z = \left| L\omega_0 - \frac{1}{C\omega_0} \right| = \frac{1}{C\omega_0}$. On en tire $L\omega_0 = \frac{2}{C\omega_0}$ et par suite :

$$\boxed{L = \frac{2}{C\omega_0^2} = 192\,\text{mH}}$$

Vérifions maintenant que sous ces conditions nous avons bien Z indépendant de R. Posons pour cela $X = \frac{1}{C\omega_0} = \frac{L\omega_0}{2}$. Nous obtenons alors pour $\underline{Z}$:

$$\underline{Z} = -jX + \frac{2jXR}{R + 2jX} = -jX\left(1 - \frac{2R}{R + 2jX}\right) = jX\,\frac{R - 2jX}{R + 2jX}$$

D'où :

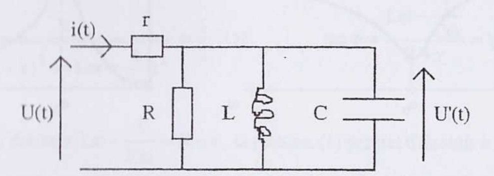
$$\boxed{Z = X = \frac{1}{C\omega_0} \quad \forall R}$$

Remarques

1) On pourrait intuitivement penser que puisque I est constant, la puissance consommée par le dipôle est constante pour toute valeur de R à la pulsation ω_0.
En fait, il n'en est rien car la phase φ de u par rapport à i varie avec R selon la formule $\varphi = \frac{\pi}{2} - 2\tan^{-1}\frac{2X}{R}$. Ainsi, la puissance consommée $P = UI\cos\varphi$ varie avec R.. La formule de φ montre que cette puissance sera nulle pour R = 0 où R infinie, et sera maximale pour R = 2X. Seule la résistance consommant de l'énergie, cela signifie que R est traversée par une intensité I' non nulle telle que $P = RI'^2 = UI\cos\varphi$. Ainsi, pour $\omega = \omega_0$, si l'on fait varier R, les grandeurs I', φ et P varient mais ...... I reste fixe.
2) La méthode de résolution de cet exercice est importante. Dans le cas où une propriété est valable pour tout paramètre physique x, il est souvent intéressant d'étudier des cas particuliers de x pour obtenir des conditions nécessaires. Il suffit ensuite de vérifier que ces conditions sont aussi suffisantes.

Exercice 9

On considère un montage RLC monté en dérivation et alimenté par une tension sinusoïdale d'amplitude U_m et de pulsation ω.



Sans calcul, tracer l'allure des courbes $I_m(\omega)$ et $U'_m(\omega)$ où I_m et U'_m désignent les amplitudes des signaux i(t) et U'(t).

L'impédance du circuit est :

$$\underline{Z} = r + \frac{1}{\frac{1}{R} + \frac{1}{jL\omega} + jC\omega} = r + \frac{R}{1 + jR(C\omega - \frac{1}{L\omega})}$$

1) $\omega \to 0$
Nous avons Z = r. Cela est dû au fait que la bobine se comporte comme un fil ($Z_L = L\omega = 0$). Il en résulte que :

$$\boxed{I_m = \frac{U_m}{r} \qquad U'_m = 0}$$

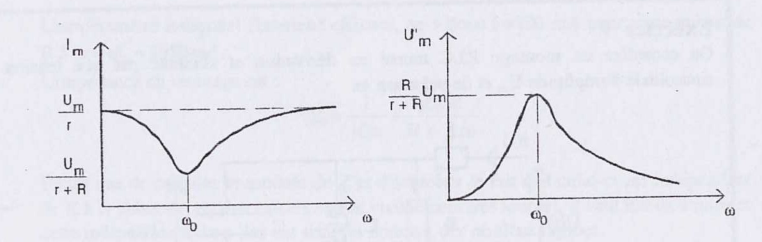
2) $\omega \to \infty$
Nous avons à nouveau Z = r. C'est maintenant le condensateur qui court-circuite le montage RLC ($Z_c = \frac{1}{C\omega} = 0$). On en tire :

$$\boxed{I_m = \frac{U_m}{r} \qquad U'_m = 0}$$

3) $\omega = \omega_0 = \frac{1}{\sqrt{LC}}$
Nous avons Z = r + R. Le montage LC "bouchonne" et le circuit se comporte comme un simple circuit série r + R. D'où :

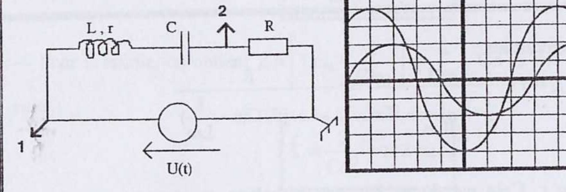
$$\boxed{I_m = \frac{U_m}{r+R} \qquad U'_m = \frac{R}{r+R}U_m \text{(diviseur de tension)}}$$

Les allures des courbes $I_m(\omega)$ et $U'_m(\omega)$ sont les suivantes :



Exercice 10

Soit le montage RLC série suivant :



$R = 50\,\Omega \quad C = 1\,\mu F$

A l'aide de l'écran de l'oscillographe, déterminer les grandeurs caractéristiques L et r de la bobine.

Il faut tout d'abord déterminer quels sont les signaux observés à l'oscilloscope. Notons U_1 et U_2 les amplitudes maximales des signaux 1 et 2 correspondant aux branchements du montage.

---- Le signal de la voie 1 correspond à la tension du générateur d'où $U_1 = U$.

---- Le signal de la voie 2 correspond à la tension aux bornes du résistor d'où $U_2 = Ri = \frac{R}{Z}U$. L'impédance Z du circuit étant $Z = \sqrt{(R+r)^2 + (L\omega - \frac{1}{C\omega})^2}$, nous avons donc :

$$U_1 = U \qquad U_2 = \frac{R}{\sqrt{(R+r)^2 + (L\omega - \frac{1}{C\omega})^2}}U$$

L'expression de U_2 montre que $U_2 < U_1$ donc la courbe d'amplitude 4 V correspond à $U_1(t)$ et la courbe d'amplitude 2V à $U_2(t)$.

L'analyse des courbes de l'oscillographe permet d'obtenir les résultats suivants :

--- $U_2 = \frac{U_1}{2}$

--- $\omega = \frac{2\pi}{T}$ avec $T = 0,8\text{ms}$ d'où $\omega = 7850\,\text{rad.s}^{-1}$.

--- $U_1(t)$, donc $U(t)$, est en avance sur $U_2(t)$, donc sur l'intensité $i(t)$, avec une phase φ telle que : $\varphi = \omega\Delta t = \frac{2\pi}{0,8}.0,1 = \frac{\pi}{4}$.

On en déduit les relations :

$$\frac{R}{\sqrt{(R+r)^2 + (L\omega - \frac{1}{C\omega})^2}} = \frac{1}{\sqrt{2}} \quad (1) \qquad \tan\varphi = \frac{L\omega - \frac{1}{C\omega}}{R+r} = 1 \quad (2)$$

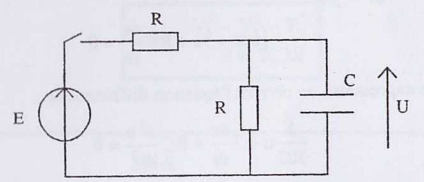
La relation (2) donnant $L\omega - \frac{1}{C\omega} = R + r$, la relation (1) permet d'aboutir à :

$$\boxed{r = R(\sqrt{2} - 1) = 21\,\Omega}$$

L se calcule alors par :

$$\boxed{L = \frac{1}{\omega}(R + r + \frac{1}{C\omega}) = 25\text{ mH}}$$

Exercice 11

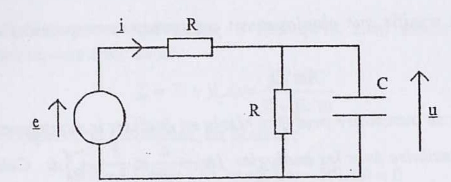


Le condensateur étant déchargé, on abaisse l'interrupteur à t = 0.

1) En utilisant les analogies transitoire-alternatif, trouver l'équation différentielle à laquelle obéit U(t).

2) On reprend l'expérience en remplaçant le générateur E par un condensateur de capacité C chargé sous une tension U_0. Trouver la nouvelle équation différentielle à laquelle obéit U(t).

1) En alternatif, nous aurions le montage suivant :



Avec les notations complexes les relations liant $\underline{e}$, $\underline{i}$ et $\underline{u}$ sont :

$$\underline{i} = \underline{A}\underline{u} = (\frac{1}{R} + jC\omega)\underline{u} \quad \text{et} \quad \underline{e} = R\underline{i} + \underline{u}$$

On en tire :

$$\underline{e} = 2\underline{u} + jRC\omega\,\underline{u} \ (1)$$

L'analogie $j\omega \to \frac{d}{dt}$ permet d'obtenir l'équation en régime transitoire $E = 2U + RC\frac{dU}{dt}$ soit :

$$\boxed{\frac{dU}{dt} + \frac{2}{RC}U = \frac{1}{RC}E}$$

2) Si on remplace le générateur $\underline{e}$ par un condensateur de tension $\underline{u}'$, nous aurons $\underline{u}' = -\frac{1}{jC\omega}\underline{i} = -(\frac{1}{jRC\omega} + 1)\underline{u}$. L'équation 1 devient :

$$-(\frac{1}{jRC\omega} + 1)\underline{u} = 2\underline{u} + jRC\omega\underline{u}$$

Soit :

$$\frac{1}{jRC\omega}\underline{u} + 3\underline{u} + jRC\omega\underline{u} = 0$$

Les analogies $j\omega \to \frac{d}{dt}$ et $\frac{1}{j\omega} \to \int dt$ donnent alors :

$$\frac{1}{RC}\int u dt + 3u + RC\frac{du}{dt} = 0$$

En dérivant cette expression, on obtient l'équation différentielle :

$$\frac{1}{RC}u + 3\frac{du}{dt} + RC\frac{d^2u}{dt^2} = 0$$

Soit :

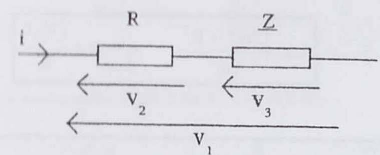
$$\boxed{\frac{d^2u}{dt^2} + \frac{3}{RC}\frac{du}{dt} + \frac{1}{R^2C^2}u = 0}$$

Remarques

1) Les analogies utilisées viennent de la notation complexe des grandeurs électriques i(t) et u(t). En complexe, le fait de poser $\underline{i} = I_m e^{j\omega t}$ *implique que* $\frac{d\underline{i}}{dt} = j\omega I_m e^{j\omega t} = j\omega\underline{i}$ *et* $\int \underline{i}dt = \frac{1}{j\omega}I_m e^{j\omega t} = \frac{1}{j\omega}\underline{i}$. *Ainsi, si en alternatif on obtient une expression du type* $j\omega\underline{X}$ *ou* $\frac{1}{j\omega}\underline{X}$, *cela signifie que physiquement ces termes correspondent respectivement à* $\frac{dX}{dt}$ *et* $\int X dt$.

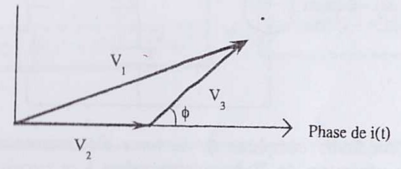
2) Tout exercice de transitoire peut être résolu en étudiant le montage en alternatif et en basculant en transitoire avec les analogies $j\omega \to \frac{d}{dt}$ *et* $\frac{1}{j\omega} \to \int dt$. *Cela permet parfois d'éviter de lourds calculs.*

Exercice 12 ENAC



On note V_1, V_2, V_3 les tensions efficaces et ϕ le déphasage entre i et v_3. Déterminer l'expression de $\cos\phi$ en fonction de V_1, V_2 et V_3.

La construction de Fresnel des tensions du montage est :

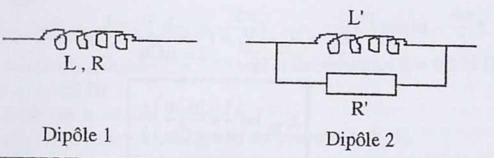


Il vient immédiatement : $V_1^2 = V_2^2 + V_3^2 + 2V_2V_3\cos\phi$. D'où :

$$\boxed{\cos\phi = \frac{V_1^2 - V_2^2 - V_3^2}{2V_2V_3}}$$

Exercice 13 INA

Donner les expressions de L' et R' en fonction de L, R et ω pour que les deux dipôles soient équivalents.



Pour que les dipôles soient équivalents, il faut qu'ils aient même impédance à la pulsation ω. Nous devons donc avoir :

$$\underline{Z} = R + jL\omega = \frac{jL'\omega R'}{R' + jL'\omega}$$

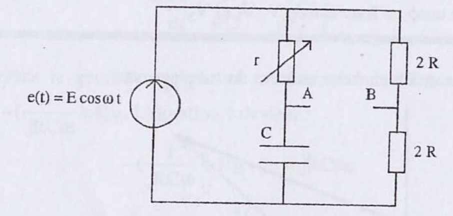
En développant l'expression précédente, on obtient :

$$(RR' - LL'\omega^2) + j(RL'\omega + R'L\omega - R'L'\omega) = 0$$

Les parties imaginaire et réelle devant être nulles, on trouve :

$$L' = \frac{L^2\omega^2 + R^2}{L\omega^2} \qquad R' = R + \frac{L^2\omega^2}{R}$$

Exercice 14 **ENAC**



1) Déterminer l'amplitude complexe de la force électromotrice $\underline{E}_{Th}$ et l'impédance complexe $\underline{Z}_{Th}$ du générateur de Thévenin équivalent à ce circuit du point de vue des bornes A et B.
2) On branche entre A et B un résistor de résistance R. Déterminer l'expression de l'intensité efficace I du courant dans R et celle de la phase φ de ce courant par rapport à e(t).

1) En utilisant les diviseurs de tension en A et B, on obtient :

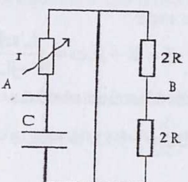
$$\underline{V}_A = \frac{\frac{1}{jC\omega}}{r + \frac{1}{jC\omega}}\underline{e} = \frac{1}{1 + jrC\omega}\underline{e} \qquad \underline{V}_B = \frac{2R}{4R}\underline{e} = \frac{1}{2}\underline{e}$$

D'où :

$$\underline{E}_{Th} = \underline{V}_A - \underline{V}_B = \left(\frac{1}{1 + jrC\omega} - \frac{1}{2}\right)\underline{e}$$

$$\underline{E}_{Th} = \left(\frac{1 - jrC\omega}{1 + jrC\omega}\right)\frac{\underline{e}}{2}$$

En remplaçant le générateur par un fil, l'impédance cherchée est celle du montage suivant :



Soit :

$$\underline{Z}_{Th} = R + \frac{\frac{r}{jC\omega}}{1 + \frac{1}{jC\omega}} \Rightarrow \underline{Z} = R + \frac{r}{1 + jrC\omega}$$

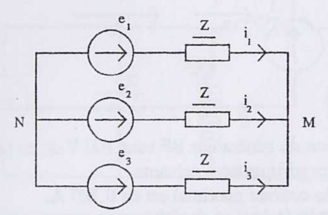
2) Lorsqu'un résistor R est branché entre A et B, nous aurons :

$$\underline{i} = \frac{\underline{E}_{Th}}{R + \underline{Z}_{Th}} = \frac{1 - jrC\omega}{1 + jrC\omega}\,\frac{1}{2R + \frac{r}{1 + jrC\omega}}\,\frac{\underline{e}}{2} = \frac{1 - jrC\omega}{2R + r + 2jRrC\omega}\,\frac{\underline{e}}{2}$$

On en déduit :

$$I = \frac{E}{2\sqrt{2}}\frac{\sqrt{1 + r^2C^2\omega^2}}{\sqrt{(r + 2R)^2 + 4R^2r^2C^2\omega^2}} \quad \text{et} \quad \varphi = \tan^{-1}(-rC\omega) - \tan^{-1}\left(\frac{2rRC\omega}{r + 2R}\right)$$

Exercice 15 **ENSAM**



Dans ce montage :
--- $e_1 = E\sqrt{2}\sin\omega t$; $e_2 = E\sqrt{2}\sin(\omega t - \frac{2\pi}{3})$; $e_3 = E\sqrt{2}\sin(\omega t - \frac{4\pi}{3})$.
--- $\underline{Z}$ est une bobine d'inductance L = 1,52 mH et de résistance R = 0,275 Ω.
--- E = 220 V et f = 50 Hz.
a) Que peut-on dire de la somme $(e_1 + e_2 + e_3)$?
b) Déterminer la valeur efficace et la phase des courants i_1, i_2, i_3.

a) En notation complexe :

$$\underline{e}_1 + \underline{e}_2 + \underline{e}_3 = E\sqrt{2}e^{j\omega t}\,(1 + e^{-\frac{2\pi}{3}j} + e^{-\frac{4\pi}{3}j}) = E\sqrt{2}\,e^{j\omega t}\,\frac{1 - e^{-\frac{6\pi}{3}j}}{1 - e^{-\frac{2\pi}{3}j}} = 0$$

D'où : $\underline{e}_1 + \underline{e}_2 + \underline{e}_3 = 0$

b) En utilisant le théorème de Millman, il vient :

$$\underline{V_{MN}} = \frac{\frac{\underline{e_1}}{\underline{Z}}+\frac{\underline{e_2}}{\underline{Z}}+\frac{\underline{e_3}}{\underline{Z}}}{\frac{3}{\underline{Z}}} = 0$$

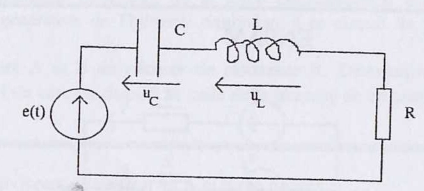
On en tire les intensités :

$$\underline{i_1} = \frac{\underline{e_1}}{\underline{Z}} = \frac{E\sqrt{2}e^{j\omega t}}{R+jL\omega} \quad \Rightarrow \quad \boxed{I_1 = \frac{E}{\sqrt{R^2+L^2\omega^2}} = 399\,A \text{ et } \varphi_1 = -\tan^{-1}(\frac{L\omega}{R}) = -\frac{\pi}{3}}$$

$$\underline{i_2} = \frac{\underline{e_2}}{\underline{Z}} = \frac{E\sqrt{2}e^{j(\omega t-\frac{2\pi}{3})}}{R+jL\omega} \quad \Rightarrow \quad \boxed{I_2 = 399A \text{ et } \varphi_2 = -\pi}$$

$$\underline{i_3} = \frac{\underline{e_3}}{\underline{Z}} = \frac{E\sqrt{2}e^{j(\omega t-\frac{4\pi}{3})}}{R+jL\omega} \quad \Rightarrow \quad \boxed{I_3 = 399\,A \text{ et } \varphi_3 = \frac{\pi}{3}}$$

Exercice 16 **ENAC**



L'amplitude de la tension du générateur BF vaut 100 V et, en faisant varier la fréquence, on trouve les résultats expérimentaux suivants :
--- La valeur efficace du courant maximal est de 0,707 A.
--- Pour 13627 Hz et 7338 Hz, la valeur efficace du courant vaut 0,5 A.
A l'aide de ces données, calculer :

a) La fréquence de résonance du circuit.
b) La valeur de R
c) Le facteur de surtension (qualité) Q du circuit.
d) Les valeurs de L et C.
e) Les valeurs efficaces de u_C et u_L à la résonance.

a) On remarque que $0,5 = \frac{0,707}{\sqrt{2}}$ et donc que les fréquences 13627 Hz et 7338 Hz correspondent aux fréquences de coupure à 3 dB. On en tire alors la fréquence de résonance f_0 qui est telle que $f_0^2 = f_1 f_2$ d'où :

$$\boxed{f_0 = 10\,000 \text{ Hz}}$$

b) La valeur maximale de l'intensité efficace est $I = \frac{U}{R} = \frac{U_m}{\sqrt{2}\,R}$. On en tire :

$$\boxed{R = \frac{U_m}{\sqrt{2}\,I} = 100\,\Omega}$$

c) Nous avons $Q = \frac{\omega_0}{\Delta\omega} = \frac{f_0}{\Delta f}$, d'où : $\boxed{Q = \frac{10000}{13627-7338} = 1,59}$

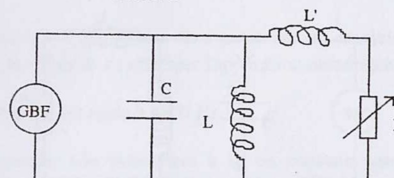
d) La valeur de Q permet de calculer L et C puisque $Q = \frac{L\omega_0}{R} = \frac{1}{RC\omega_0}$. On en tire :

$$\boxed{L = \frac{QR}{\omega_0} = 2,53\text{ mH}} \qquad \boxed{C = \frac{1}{RQ\omega_0} = 0,1\,\mu F}$$

e) A la résonance $U_c = Z_c I = \frac{1}{C\omega_0}\frac{U}{R} = QU$ et $U_L = Z_L I = L\omega_0 \frac{U}{R} = QU$. On en déduit donc que :

$$\boxed{U_c = U_L = 1,59\frac{100}{\sqrt{2}} = 112\,V}$$

Exercice 17 **ENAC**



Le générateur délivre une tension sinusoïdale de pulsation ω, de valeur efficace U = 220 V et de fréquence 50 Hz. La résistance R est variable et L = 1 H.

1) Exprimer la puissance moyenne P absorbée par la résistance R en fonction de R, L', ω et U.
2) Exprimer la valeur de R_0 de R pour laquelle la puissance P est maximale.
3) Calculer L' et la valeur maximale P_M de P sachant que $R_0 = 12\,\Omega$.
4) Pour une valeur R_1 de R ($R_1 > R_0$), la puissance délivrée par le générateur vaut $P_1 = 800$ W. Calculer R_1.
5) Le facteur de puissance est égal à l'unité et $R = R_1$. Calculer la valeur de C.

1) La puissance P consommée par la résistance R (qui est aussi la puissance totale consommée par le montage) vaut $P = RI^2$ avec $I = \frac{U}{Z_{L'R}} = \frac{U}{\sqrt{R^2+L'^2\omega^2}}$. D'où :

$$\boxed{P = \frac{RU^2}{R^2+L'^2\omega^2}}$$

2) Cette puissance sera maximale pour $\frac{dP}{dR}=0$.

$$\frac{dP}{dR}=\frac{R^2+L'^2\omega^2-2R^2}{(R^2+L'^2\omega^2)^2}U^2=\frac{L'^2\omega^2-R^2}{(R^2+L'^2\omega^2)^2}U^2$$

On en tire :

$$\boxed{R_0=L'\omega}$$

3) On obtient immédiatement :

$$\boxed{L'=\frac{R_0}{\omega}=38\text{ mH}} \qquad \boxed{P_M=\frac{U^2}{2R_0}=2,0\text{ kW}}$$

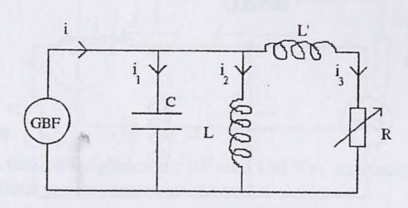
4) Nous avons $P=\frac{R_1}{R_1^2+R_0^2}U^2$. En développant numériquement cette expression, on obtient l'équation :

$$R_1^2-60,5\,R_1+144=0$$

D'où la solution $R_1>R_0$:

$$\boxed{R_1=58\,\Omega}$$

5)



Si le facteur de puissance vaut $\cos\varphi=1$, cela signifie que la phase entre la tension du générateur et l'intensité i est nulle.

$$\underline{i}=\underline{i}_1+\underline{i}_2+\underline{i}_3$$

$$\underline{i}=(jC\omega+\frac{1}{jL\omega}+\frac{1}{R+jL'\omega})\underline{u}=\left[j(C\omega-\frac{1}{L\omega}-\frac{L'\omega}{R^2+L'^2\omega^2})+\frac{R}{R^2+L'^2\omega^2}\right]\underline{u}$$

La partie imaginaire de l'expression devant être nulle, il vient :

$$\boxed{C=\frac{1}{L\omega^2}+\frac{L'}{R^2+L'^2\omega^2}=21\,\mu\text{F}}$$

Problème n°10

d'après Ecole Nationale Vétérinaire

Connaissances requises : impédance complexe ; résonance d'intensité dans un circuit RLC série, en régime sinusoïdal forcé.

On considère la portion de circuit ci-contre, comprenant un résistor de résistance R, une bobine d'inductance L et de résistance r et un condensateur parfait de capacité C. Cette portion est alimentée par une tension alternative sinusoïdale $u(t)=U\sqrt{2}\cos(\omega t)$.

A i R r, L C B u(t)

Résistance du résistor : R = 10 Ω ; résistance de la bobine r avec r < R.
Le rapport de la tension efficace U_R aux bornes du résistor à la tension efficace U aux bornes du dipôle AB est noté $a=\frac{U_R}{U}$.

1) Pour la fréquence $f=f_0$, la valeur de a passe par un maximum a_0. Expliquer ce résultat, en déduire la valeur de r ; effectuer l'application numérique avec $a_0=0,700$.

2) La valeur précédente f_0 est égale à 1000 Hz.

2a) Pour des fréquences très inférieures à f_0, on constate que la valeur de a est pratiquement proportionnelle à f. Quel est alors l'élément déterminant pour le fonctionnement du circuit ? Justifiez votre réponse.

2b) Pour des fréquences f très supérieures à f_0, on constate que la valeur de a est pratiquement proportionnelle à $\frac{1}{f}$. Quel est alors l'élément déterminant pour le fonctionnement du circuit ? Justifiez votre réponse.

2c) Pour f = 10 Hz on constate que $a=1,25.10^{-4}$. En déduire les valeurs numériques de C et L. Calculer numériquement a pour $f=10^5$ Hz.

3) Déterminer à 980 Hz et à 1020 Hz le déphasage, en degrés, de la tension aux bornes de R, par rapport à la tension totale u.

Corrigé

1) En utilisant les amplitudes complexes :

$$\frac{\underline{U}_R}{\underline{U}} = \frac{R\underline{I}}{(R+r+jL\omega - \frac{j}{C\omega})\underline{I}} = \frac{R}{R+r+j(L\omega - \frac{1}{C\omega})}.$$

On a donc, en prenant le module : $a = \frac{U_R}{U} = \frac{R}{\sqrt{(R+r)^2+(L\omega-\frac{1}{C\omega})^2}}$

On voit que a passe par un maximum, quand le dénominateur est minimum soit lorsque

$$L\omega_0 - \frac{1}{C\omega_0} = 0 \text{ ou } \omega_0 = \frac{1}{\sqrt{LC}}$$

a est maximum pour la fréquence : $f = f_0 = \frac{\omega_0}{2\pi} = \frac{1}{2\pi\sqrt{LC}}$.

La valeur maximale de a est alors : $a_0 = \frac{R}{R+r} = 0{,}700$; on en déduit que

$$\boxed{r = \frac{R(1-a_0)}{a_0} = 4{,}29\ \Omega}$$

2a) Si f est petite devant f_0, l'expression de a s'écrit : $a \sim \frac{R}{\sqrt{(R+r)^2+(\frac{1}{2\pi fC})^2}} \sim 2\pi fRC$.

On voit que a est proportionnel à f. L'élément déterminant du circuit est le condensateur C, car son impédance $\frac{1}{C\omega}$ devient très grande et donc l'emporte devant (R+r) ainsi que devant l'impédance $L\omega$ de la bobine qui devient négligeable quand $\omega \to 0$.

2b) Lorsque f est très supérieure à f_0, l'expression de a devient : $a \sim \frac{R}{\sqrt{(R+r)^2+L^2(2\pi f)^2}}$

Soit $a \sim \frac{R}{L2\pi f}$; a est donc bien proportionnel à $\frac{1}{f}$; l'élément déterminant pour le circuit est alors la bobine car son impédance $L\omega$ devient très grande devant (R+r) et devant l'impédance du condensateur, $\frac{1}{C\omega}$, qui tend alors vers zéro.

2c) f = 10 Hz ; $a = 1{,}25.10^{-4}$. L'expression de $a = \frac{U_R}{U} \sim 2\pi fRC$ puisque f est très petite devant fo ; $a = 2\pi fRC$ et donc $\boxed{C = \frac{a}{2\pi fR} = 0{,}2.10^{-6}\ \text{F} = 0{,}2\ \mu\text{F}}$

Par ailleurs, a est maximum pour $\omega_0 = \frac{1}{\sqrt{LC}}$; on en déduit donc que

$$\boxed{L = \frac{1}{C\omega_0^2} = 0{,}126\ \text{H}}$$

Lorsque f = 10^5 Hz, on peut admettre que f est très supérieure à f_0 ; on a alors $a \sim \frac{R}{L2\pi f}$;

on en déduit numériquement : $\boxed{a = 1{,}26.10^{-4}}$

Pour f = 10 Hz et pour f = 10^5 Hz, on retrouve donc la même valeur de a.

3) Le déphasage, φ, de la tension aux bornes de R par rapport à la tension totale u est égale à l'argument de $\frac{\underline{U}_R}{\underline{U}} = \frac{R\underline{I}}{(R+r+jL\omega-\frac{j}{C\omega})\underline{I}} = \frac{R}{R+r+j(L\omega-\frac{1}{C\omega})}$;

φ = argument du numérateur – argument du dénominateur
donc φ = – argument du dénominateur.

on a donc $\tan(\varphi) = -\frac{L\omega - \frac{1}{C\omega}}{R+r}$;

pour f = 980 Hz, tan(φ) = 2,53 ⇒ $\boxed{\varphi = 1{,}19\ \text{rad}}$

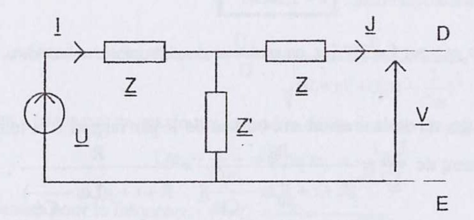
pour f = 1020 Hz, tan(φ) = -1,91 ⇒ $\boxed{\varphi = -1{,}09\ \text{rad}}$

Dans le premier cas, on est avant la résonance ; le condensateur l'emporte devant la bobine et donc l'intensité est en avance par rapport à la tension totale u ; en effet en mesurant la tension aux bornes de R, on mesure bien une tension en phase avec l'intensité.
Dans le second cas, c'est l'inverse et l'intensité est en retard sur la tension totale.

Problème n°11

Ecole supérieure des sciences et des technologies des industries du bois.

Une cellule en T est formée de trois dipôles d'impédances $\underline{Z}$, $\underline{Z}'$ et $\underline{Z}$ et d'admittances $\underline{Y}$, $\underline{Y}'$ et $\underline{Y}$.



On donne $u = U_0\sin(\omega t)$ que l'on représentera par son amplitude complexe : $\underline{U} = U_0$. La source débite un courant d'amplitude complexe $\underline{I}$. L'ensemble débite dans une charge non représentée sur la figure, un courant d'amplitude complexe $\underline{J}$ sous une tension $v = V_0\sin(\omega t + \varphi)$, d'amplitude complexe $\underline{V} = V_0 e^{j\varphi}$.

1) Déterminer l'expression de $\underline{I}$ et de $\underline{J}$ en fonction de $\underline{U}$, $\underline{V}$, $\underline{Y}$ et $\underline{Y}'$.

2) La charge branchée entre D et E est un voltmètre d'impédance interne infinie. Donner l'expression de $\underline{V}$ en fonction de $\underline{U}$, $\underline{Y}$ et $\underline{Y}'$.

3) Le dipôle $\underline{Z}$ est un résistor de résistance R, le dipôle $\underline{Z}'$ est un condensateur de capacité C.

3a) Donner l'expression de $\underline{V}$ en fonction de $\underline{U}$, R, C et ω.

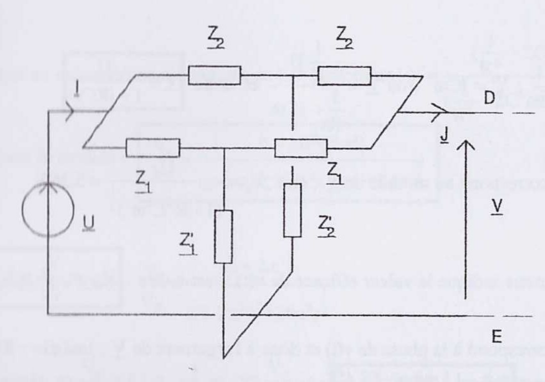
A.N. : $R = 1000\ \Omega$; $C = 10\ \mu F$; $\omega = 200\ rad.s^{-1}$; $U_0 = 12$ V.

3b) Quelle valeur indique le voltmètre ?

3c) Calculer φ en radians.

4) On monte en parallèle deux cellules en T dont les éléments sont :

$\underline{Z}_1$ et $\underline{Z}'_2$: résistors de résistance R ;
$\underline{Z}'_1$: condensateur de capacité 4C ;
$\underline{Z}_2$: condensateur de capacité C.



4.1) Donner les expressions de $\underline{I}$ et de $\underline{J}$ en fonction de $\underline{U}$, $\underline{V}$, $\underline{Y}_1$, $\underline{Y}'_1$, $\underline{Y}_2$ et $\underline{Y}'_2$.

4.2) La charge branchée entre D et E est un voltmètre d'impédance infinie.

Calculer $\dfrac{V_0}{U_0}$ en fonction de R, C et ω.

4.3) On pose $RC\omega = x$.

Tracer l'allure du graphe de $\dfrac{V_0}{U_0}$ en fonction de x.

4.4) On donne $R = 1000\ \Omega$; $C = 10\ \mu F$. Calculer la valeur de ω pour laquelle V_0 est nulle.

Corrigé

1) Avec le théorème de Millmann, appliqué aux amplitudes complexes :

$$\underline{U}_{AB} = \frac{\underline{Y}\,\underline{U}+\underline{Y}\,\underline{V}}{2\underline{Y}+\underline{Y}'} \quad \text{or} \quad \underline{U}_{AB} = \underline{U} - \frac{\underline{I}}{\underline{Y}} = \underline{V} + \frac{\underline{J}}{\underline{Y}}$$

on en déduit : $\boxed{\underline{I} = \dfrac{\underline{Y}^2\underline{U} + \underline{Y}\,\underline{Y}'\underline{U} - \underline{Y}^2\underline{V}}{2\underline{Y}+\underline{Y}'}}$ et $\boxed{\underline{J} = \dfrac{-\underline{Y}^2\underline{V} - \underline{Y}\,\underline{Y}'\underline{V} + \underline{Y}^2\underline{U}}{2\underline{Y}+\underline{Y}'}}$

2) Puisque le voltmètre a une impédance infinie : $\underline{J} = 0$ et donc $\boxed{\underline{V} = \dfrac{\underline{Y}\,\underline{U}}{\underline{Y}+\underline{Y}'}}$

3) $\underline{Y} = \frac{1}{R}$; $\underline{Y}' = jC\omega$ d'où $\underline{V} = \dfrac{\frac{1}{R}\underline{U}}{\frac{1}{R} + jC\omega}$ et donc $\boxed{\underline{V} = \dfrac{\underline{U}}{1 + jRC\omega}}$

3a) V_0 correspond au module de $\underline{V}$; soit $V_0 = \dfrac{U_0}{(1+R^2C^2\omega^2)^{\frac{1}{2}}} = 5{,}36$ V

Le voltmètre indique la valeur efficace de v(t), c'est-à-dire : $\boxed{V_{eff} = \dfrac{V_0}{\sqrt{2}} = 3{,}79 \text{ V}}$

3b) φ correspond à la phase de v(t) et donc à l'argument de $\underline{V}$; $\tan(\varphi) = -RC\omega$
on en tire : $\boxed{\varphi = -1{,}1 \text{ rad} = -63{,}4°}$

4.1) Les cellules étant montées en parallèle on peut reprendre pour chacune d'elles les résultats de la question **1)** :

$$\underline{I}_1 = \frac{\underline{Y}_1^2\,\underline{U} + \underline{Y}_1\,\underline{Y}_1'\,\underline{U} - \underline{Y}_1^2\,\underline{V}}{2\underline{Y}_1 + \underline{Y}_1'}$$

$$\underline{I}_2 = \frac{\underline{Y}_2^2\,\underline{U} + \underline{Y}_2\,\underline{Y}_2'\,\underline{U} - \underline{Y}_2^2\,\underline{V}}{2\underline{Y}_2 + \underline{Y}_2'}$$

Or $\underline{I} = \underline{I}_1 + \underline{I}_2$ d'où

$$\underline{I} = \frac{\underline{Y}_1^2\,\underline{U} + \underline{Y}_1\,\underline{Y}_1'\,\underline{U} - \underline{Y}_1^2\,\underline{V}}{2\underline{Y}_1 + \underline{Y}_1'} + \frac{\underline{Y}_2^2\,\underline{U} + \underline{Y}_2\,\underline{Y}_2'\,\underline{U} - \underline{Y}_2^2\,\underline{V}}{2\underline{Y}_2 + \underline{Y}_2'}$$

et de même : $\underline{J} = \underline{J}_1 + \underline{J}_2 = \dfrac{-\underline{Y}_1^2\,\underline{V} - \underline{Y}_1\,\underline{Y}_1'\,\underline{V} + \underline{Y}_1^2\,\underline{U}}{2\underline{Y}_1 + \underline{Y}_1'} + \dfrac{-\underline{Y}_2^2\,\underline{V} - \underline{Y}_2\,\underline{Y}_2'\,\underline{V} + \underline{Y}_2^2\,\underline{U}}{2\underline{Y}_2 + \underline{Y}_2'}$

4.2) On a $\underline{J} = 0$; $\underline{Y}_1 = \underline{Y}_2' = \frac{1}{R}$; $\underline{Y}_1' = j4C\omega$; $\underline{Y}_2 = jC\omega$.

En remplaçant : $\underline{J} = 0 = \dfrac{-\frac{1}{R^2}\underline{V} - j4\frac{C\omega}{R}\underline{V} + \frac{1}{R^2}\underline{U}}{\frac{2}{R} + j4C\omega} + \dfrac{C^2\omega^2\underline{V} - j\frac{C\omega}{R}\underline{V} - C^2\omega^2\underline{U}}{j2C\omega + \frac{1}{R}}$

En réduisant au même dénominateur, on en tire facilement : $\underline{V} = \dfrac{(\frac{1}{R^2} - 2C^2\omega^2)\underline{U}}{(\frac{1}{R^2} - 2C^2\omega^2 + j\frac{6C\omega}{R})}$

Et en prenant le module : $\boxed{\dfrac{V_0}{U_0} = \dfrac{|1 - 2R^2C^2\omega^2|}{((1-2R^2C^2\omega^2)^2 + 36R^2C^2\omega^2)^{\frac{1}{2}}}}$

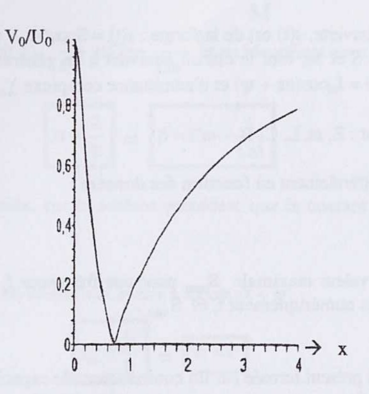
4.3) En posant $x = RC\omega$: $\dfrac{V_0}{U_0} = \dfrac{|1-2x^2|}{((1-2x^2)^2 + 36x^2)^{\frac{1}{2}}}$

Courbe : $x = 0 \Rightarrow \frac{V_0}{U_0} = 1$; $x \to \infty \Rightarrow \frac{V_0}{U_0} \to \frac{2x^2}{2x^2} = 1$; pour $x = \frac{1}{\sqrt{2}} \Rightarrow \frac{V_0}{U_0} = 0$.

Pour la dérivée en $x = \frac{1}{\sqrt{2}}$, on a une limite à gauche et une limite à droite :

Si $x < \frac{1}{\sqrt{2}}$ alors $\dfrac{V_0}{U_0} \approx \dfrac{(1-2x^2)}{6x}$ et $\dfrac{d\left(\frac{V_0}{U_0}\right)}{dx} = \dfrac{-12x^2 - 6}{36x^2} = -\dfrac{2}{3}$ en $x = \frac{1}{\sqrt{2}}$

Si $x > \frac{1}{\sqrt{2}}$ alors $\dfrac{V_0}{U_0} \approx \dfrac{(2x^2-1)}{6x}$ et $\dfrac{d\left(\frac{V_0}{U_0}\right)}{dx} = \dfrac{12x^2 + 6}{36x^2} = \dfrac{2}{3}$ en $x = \frac{1}{\sqrt{2}}$

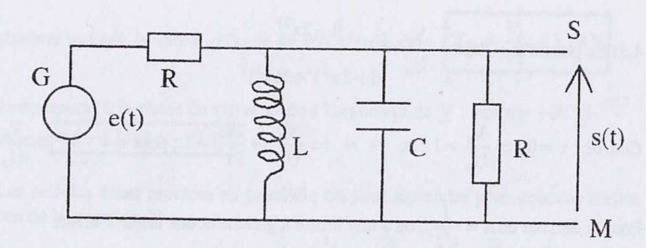


4.4) $\dfrac{V_0}{U_0} = 0$ si $x = \dfrac{1}{\sqrt{2}} = RC\omega \Rightarrow \omega = \dfrac{1}{RC\sqrt{2}}$ et donc $\boxed{\omega = 70{,}7 \text{ rad.s}^{-1}}$

Problème n°12

d'après Ecole Nationale Supérieure de géologie de Nancy

Connaissances requises : admittance complexe ; représentation de Thévenin et Norton ; notation complexe.



G est un générateur idéal de tension sinusoïdale : $e = E\cos(\omega t)$ avec $E = 5$ V.
Le condensateur a une capacité $C = 2{,}53.10^{-6}$ F et la bobine, une inductance $L = 10$ mH.

Les points S et M constituent la sortie du dispositif ; elle peut être ouverte (rien n'est branché) ou fermé sur un dipôle. La tension de sortie est notée s(t).

1) La sortie est ouverte. s(t) est de la forme : $s(t) = S\cos(\omega t + \varphi)$.
Entre les points S et M, tout le circuit équivaut à un générateur de Norton, de courant électromoteur : $i = I_N\cos(\omega t + \psi)$ et d'admittance complexe $\underline{Y}_N = \alpha + j\beta$.

Les données sont : E, ω, L, C, R.

a) Déterminer littéralement en fonction des données :

a1) α et β.
a2) I_N et ψ.
a3) S et φ.

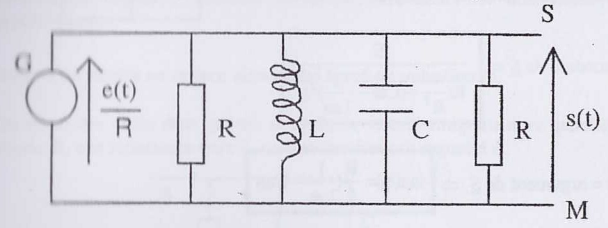
b) S prend une valeur maximale S_{max} pour une fréquence f_r de résonance. Déterminer littéralement puis numériquement f_r et S_{max}.

2) La sortie est à présent fermée sur un condensateur de capacité C'.
On constate que S passe par un maximum pour $f_r' = 800$ Hz.

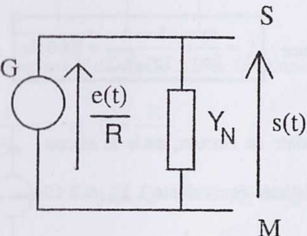
Calculer C'.

Corrigé

1.a.1) Pour trouver l'admittance du générateur de Norton équivalent au dipôle SM, il faut d'abord remplacer le générateur et la résistance R en série par le modèle de Norton :



On peut ensuite calculer l'admittance équivalente aux quatre dipôles R, L, C et R en parallèles.



$\underline{Y}_N = \frac{2}{R} + \frac{1}{jL\omega} + jC\omega$ soit $\underline{Y}_N = \frac{2}{R} + j(C\omega - \frac{1}{L\omega})$ et en identifiant avec $\underline{Y}_N = \alpha + j\beta$ on a

$$\boxed{\alpha = \frac{2}{R}} \text{ et } \boxed{\beta = C\omega - \frac{1}{L\omega}}$$

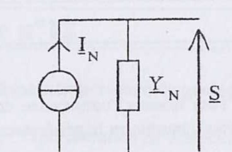
1.a.2) On voit tout de suite, sur le schéma précédent que le courant électromoteur est donné par $i(t) = \frac{e(t)}{R}$.

Et donc $i = \frac{E}{R}\cos(\omega t)$ et en identifiant avec $i = I_N\cos(\omega t + \psi)$:

$$\boxed{I_N = \frac{E}{R}} \text{ et } \boxed{\psi = 0}$$

1.a.3) On peut donc remplacer le circuit de l'énoncé par le modèle de Norton suivant, en prenant les amplitudes complexes.

On a donc $\underline{S} = \dfrac{\underline{I_N}}{\underline{Y_N}} = \dfrac{E}{R(\frac{2}{R} + j(C\omega - \frac{1}{L\omega}))}$



En posant : $s = S\cos(\omega t + \varphi)$ avec

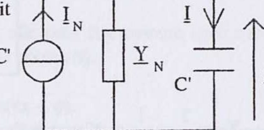
$$S = \text{module de } \underline{S} = \boxed{\dfrac{E}{R(\frac{4}{R^2} + (C\omega - \frac{1}{L\omega})^2)^{\frac{1}{2}}}}$$

et φ = argument de $\underline{S}$ $\Rightarrow$ $\boxed{\tan(\varphi) = \frac{R}{2}(\frac{1}{L\omega} - C\omega)}$

1-b) On voit directement que S est maximal si $(C\omega - \frac{1}{L\omega}) = 0$ soit $\omega^2 = \frac{1}{LC}$;

La fréquence de résonance : $\boxed{f_r = \frac{\omega}{2\pi} = \frac{1}{2\pi}\frac{1}{\sqrt{LC}} = 1000\,\text{Hz}}$ et $\boxed{S_{max} = \frac{E}{2} = 2{,}5\,\text{V}}$

2) En reprenant le modèle de Norton, on a le circuit suivant :



On peut calculer l'admittance équivalente à $\underline{Y}_N$ et à C' en parallèle :

$$\underline{Y}_{eq} = \underline{Y}_N + jC'\omega = \frac{2}{R} + j((C+C')\omega - \frac{1}{L\omega})$$

d'où $\underline{S} = \dfrac{\underline{I_N}}{\underline{Y}_{eq}} \Rightarrow \underline{S} = \dfrac{E}{R(\frac{2}{R} + j((C+C')\omega - \frac{1}{L\omega}))}$

En prenant le module : $S = \dfrac{E}{R(\frac{4}{R^2} + ((C+C')\omega - \frac{1}{L\omega})^2)^{\frac{1}{2}}}$

On voit que S est maximal si $(C+C')\omega - \frac{1}{L\omega} = 0$ soit $\omega^2 = \frac{1}{L(C+C')} = (2\pi f_r')^2$

on en déduit : $\boxed{C' = 1{,}43.10^{-6}\,\text{F}}$

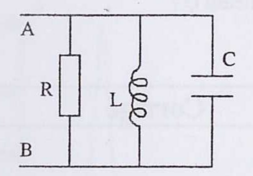
Problème n°13

d'après Travaux Ruraux et Techniques Sanitaires

Connaissances requises : notation complexe ; impédance et admittance ; régime sinusoïdal forcé.

I) Etude d'un dipôle en régime sinusoïdal forcé de pulsation ω.

1) On considère entre deux points A et B, le circuit comportant en parallèle : une résistance R, une inductance pure L, un condensateur de capacité C.



a) Ecrire l'admittance complexe $\underline{Y}$ du dipôle AB en fonction de R, L, C, ω.

b) On pose $LC\omega_0^2 = 1$, $\frac{\omega}{\omega_0} = x$ et $Q = \frac{R}{L\omega_0}$.

Exprimer ($\underline{Y}$.R) sous la forme $1 + j.f(x,Q)$ où $f(x,Q)$ désigne une fonction simple de x et Q.

c) En déduire l'expression de l'impédance complexe $\underline{Z}$ du dipôle AB.

d) Préciser le comportement du dipôle aux basses fréquences et aux hautes fréquences ; on donnera une interprétation physique du dipôle équivalent obtenu.

2) Etudier brièvement le comportement en fonction de x, du module de $\underline{Z}$: tracer l'allure de la courbe représentative.

II) Utilisation du dipôle précédent.

On alimente le dipôle précédent AB par une source de tension alternative sinusoïdale : $v(t) = V_0\cos(\omega t)$.
On associe à l'intensité instantanée dans le dipôle AB, $i(t) = I_0\cos(\omega t + \varphi)$, l'intensité complexe $\underline{I} = I_0 e^{j\varphi}$. On néglige l'impédance interne du générateur.

1a) Ecrire, sans démonstration, l'expression de $\underline{I}$ en fonction de V_0, R, Q et x.

1b) On note I le module de $\underline{I}$; quel est l'ensemble des valeurs de x tel que $I \le \sqrt{2}\frac{V_0}{R}$.
Montrer que cet ensemble est limité par deux valeurs x_2 et x_1 et calculer $x_2 - x_1$ en fonction de Q.

1c) Etudier brièvement le déphasage φ de l'intensité $i(t)$ par rapport à la tension $v(t)$ en fonction de x ; tracer la courbe $\varphi(x)$.

1d) Calculer pour $x = 0{,}9$, $L = 1$ mH, $C = 0{,}1\ \mu$F, $R = 500\ \Omega$, les valeurs numériques de φ, de $x_2 - x_1$ et de Q.

2) On choisit $\omega = \omega_0$.

Quelles sont en notation complexe les expressions des intensités dans les branches comportant L et C ?
Ecrire également les expressions des intensités instantanées. Que constate-t-on ? Quel nom pourrait-on donner au coefficient Q ?

Corrigé

I) Etude d'un dipôle en régime sinusoïdal forcé de pulsation ω.

1a) Pour des dipôles en dérivation, on additionne les admittances complexes :

$$\boxed{\underline{Y} = \frac{1}{R} + jC\omega + \frac{1}{jL\omega}}$$

1b) $LC\omega_0^2 = 1$, $\dfrac{\omega}{\omega_0} = x$ et $Q = \dfrac{R}{L\omega_0}$; on en déduit que $\underline{Y}.R = 1 + j\left(\dfrac{LC\omega^2 - 1}{\dfrac{L\omega}{R}}\right)$

$$\underline{Y}.R = 1 + \frac{j\left(\dfrac{\omega^2}{\omega_0^2} - 1\right)}{\dfrac{\omega}{Q\omega_0}} \quad \text{et} \quad \underline{Y}.R = \boxed{1 + jQ\left(x - \frac{1}{x}\right)} = 1 + j.f(x,Q) \text{ avec } f(x,Q) = Q\left(x - \frac{1}{x}\right).$$

1c) L'impédance complexe du dipôle AB est : $\underline{Z} = \dfrac{1}{\underline{Y}} = \dfrac{R}{1 + jQ\left(x - \dfrac{1}{x}\right)}$.

1d) Aux basses fréquences : $x \to 0$; $\underline{Z} \to 0$; l'impédance tend vers zéro ; on aura un court-circuit dû au fait que l'impédance de la bobine tend vers 0 avec ω.
Aux hautes fréquences : $x \to \infty$; $\underline{Z} \to 0$; l'impédance tend encore vers zéro ; on a de nouveau un court-circuit car l'impédance du condensateur tend vers 0 avec ω.

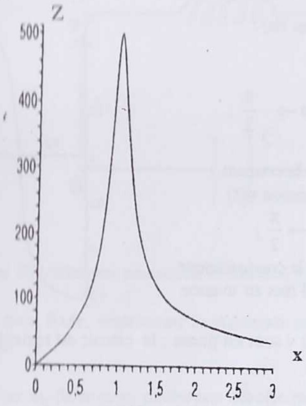
2) Soit Z, le module de $\underline{Z}$; on a déjà vu que $Z \to 0$ quand $x \to 0$ et quand $x \to \infty$.

$Z = \dfrac{R}{\left(1 + Q^2\left(x - \dfrac{1}{x}\right)^2\right)^{\frac{1}{2}}}$; on voit que Z est maximum et égal à R quand $x = 1$.

Au voisinage de $x = 0$, on a $Z \sim \dfrac{Rx}{Q}$; la courbe se comporte comme une droite de pente $\dfrac{R}{Q}$.

Quand $x \to \infty$, on a $Z \sim \dfrac{R}{Qx}$; la courbe se comporte comme une hyperbole.

On voit que Z passe par un maximum et le courant est donc minimum pour $x = 1$. On a un circuit bouchon.



II) Utilisation du dipôle précédent.

1a) $\boxed{\underline{I} = \dfrac{\underline{V}}{\underline{Z}} = \dfrac{V_0}{R}\left(1 + jQ\left(x - \dfrac{1}{x}\right)\right)}$

1b) $I = |\underline{I}| = \dfrac{V_0}{R}\left(1 + Q^2\left(x - \dfrac{1}{x}\right)^2\right)^{\frac{1}{2}}$; on veut résoudre : $I \le \sqrt{2}\dfrac{V_0}{R}$

d'où $\dfrac{V_0}{R}\left(1 + Q^2\left(x - \dfrac{1}{x}\right)^2\right)^{\frac{1}{2}} \le \sqrt{2}\dfrac{V_0}{R} \quad \Rightarrow \quad Q^2\left(x - \dfrac{1}{x}\right)^2 \le 1$. (1)

On doit donc résoudre : $-1 \le Q\left(x - \dfrac{1}{x}\right) \le +1$; résolvons d'abord $Q\left(x - \dfrac{1}{x}\right) \le 1$.

soit $Qx^2 - x - Q \le 0$; cette inéquation est vérifiée si x est compris entre les racines x_2' et x_2 de l'équation : $x_2' = \dfrac{1 - \sqrt{1 + 4Q^2}}{2Q} \le x \le x_2 = \dfrac{1 + \sqrt{1 + 4Q^2}}{2Q}$.

Il faut également résoudre : $-1 \le Q\left(x - \dfrac{1}{x}\right)$; soit $0 \le Qx^2 + x - Q$; cette inéquation est vérifiée si la solution x est extérieure aux racines x_1' et x_1 de l'équation :

$$x \le x_1' = \frac{-1-\sqrt{1+4Q^2}}{2Q} \quad \text{et} \quad x \ge x_1 = \frac{-1+\sqrt{1+4Q^2}}{2Q}$$

Pour que les deux équations soient vérifiées et compte tenu du fait que x est positif, on doit donc avoir : $x_1 = \dfrac{-1+\sqrt{1+4Q^2}}{2Q} \le x \le x_2 = \dfrac{1+\sqrt{1+4Q^2}}{2Q}$.

On a directement : $\boxed{x_2 - x_1 = \dfrac{1}{Q}}$

1c) Le déphasage φ de i(t) par rapport à u(t) est égal à l'argument de $\underline{Y}$, puisque $\underline{I} = \underline{YV} = \underline{YV_0}$.

Avec le résultat de la question **1b)** :

$\tan(\varphi) = f(x,Q) = Q(x - \frac{1}{x})$.

si $x \to 0$; $\tan(\varphi) \to -\infty$ et $\varphi \to -\frac{\pi}{2}$;

aux basses fréquences c'est la bobine qui détermine le courant, qu'elle met en retard sur la tension v(t).

si $x \to \infty$; $\tan(\varphi) \to \infty$ et $\varphi \to \frac{\pi}{2}$;

aux grandes fréquences c'est le condensateur qui détermine le courant qu'il met en avance sur la tension.

si x = 1 , on a $\tan(\varphi) = 0$; i et v sont en phase ; le circuit est résistif.

1d) A.N. : x = 0,9, L = 1 mH, C = 0,1 μF, R = 500 Ω ;

$\omega_0 = \dfrac{1}{\sqrt{LC}} = 10^5$ rad.s^{-1} ; $Q = \dfrac{R}{L\omega_0} = 5$; $x_2 - x_1 = \dfrac{1}{Q} = 0{,}2$;

$\tan(\varphi) = Q(x - \frac{1}{x}) = -1{,}055$ d'où $\varphi = -0{,}81$ rad.

2) $\omega = \omega_0$.

Branche de L : $\underline{i_L} = \dfrac{V_0}{L\omega_0} e^{j(\omega_0 t - \frac{\pi}{2})}$ et $i_L(t) = \dfrac{V_0}{L\omega_0}\cos(\omega_0 t - \frac{\pi}{2}) = \dfrac{Q}{R} V_0 \cos(\omega_0 t - \frac{\pi}{2})$.

Branche de C : $\underline{i_C} = C\omega_0 V_0 e^{j(\omega_0 t + \frac{\pi}{2})}$ et $i_C(t) = C\omega_0 V_0 \cos(\omega_0 t + \frac{\pi}{2}) = \dfrac{Q}{R} V_0 \cos(\omega_0 t + \frac{\pi}{2})$.

Or $LC\omega_0^2 = 1$ soit $L\omega_0 = \dfrac{1}{C\omega_0}$; on voit donc que $i_C(t)$ et $i_L(t)$ ont même amplitude, mais sont en opposition de phase ; on aura donc : $i_C(t) + i_L(t) = 0$ quand $\omega = \omega_0$, et donc, d'après la loi des noeuds : $i(t) = i_R(t)$.

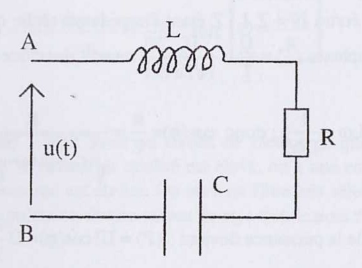
On voit également que l'amplitude de $i_C(t)$ ou de $i_L(t)$ est proportionnelle à Q ; pour cette raison, Q pourrait s'appeler *facteur de surintensité* ; si Q est grand, l'intensité du courant dans la bobine ou dans le condensateur pourra prendre une valeur importante.

Problème n°14

d'après INA-ENSA

Connaissances requises : circuit RLC série ; régime sinusoïdal forcé ; notation complexe ; puissance moyenne ; aspects énergétiques du circuit RLC série.

1) Un circuit RLC série (cf schéma) est soumis à une tension alternative sinusoïdale définie par $u(t) = U_0\sin(\omega t)$.



On y étudie le régime d'oscillations sinusoïdales forcées, à la pulsation ω.

1.1. La pulsation ω étant fixée, déterminer la puissance moyenne <P> dissipée dans ce circuit par effet Joule.

1.2. Pour quelle valeur ω_0 de ω cette puissance est-elle maximale ? A quel phénomène physique correspond cette valeur ω_0 ?

1.3. Déterminer les limites ω_{min} et ω_{max} de l'intervalle de pulsation sur lequel <P> est au moins égal à la moitié de sa valeur maximale P_0.

En déduire l'expression du facteur $Q = \dfrac{\omega_0}{\omega_{max} - \omega_{min}}$ en fonction de L, R et ω_0.

Pour L et C fixés, comment Q varie-t-il avec R ?

Quel est l'intérêt d'un circuit possédant un Q élevé ?

En déduire une justification de la dénomination : "facteur de qualité" du circuit.

1.4. Exprimer, en fonction de L, R et U_0 l'énergie électromagnétique moyenne $<E_0>$ stockée, pour la pulsation ω_0, dans la bobine et le condensateur.

En déduire une relation entre Q, ω_0, $<E_0>$ et $<P_0>$. Retrouve-t-on, du point de vue énergétique, l'intérêt d'un circuit à Q élevé ?

Corrigé

1.1) D'après le cours, la puissance moyenne dissipée par effet Joule est donnée par $\langle P\rangle = UI\cos(\varphi)$ où U et I représentent respectivement la tension efficace aux bornes du circuit et l'intensité efficace dans le circuit ; φ est le déphasage entre u(t) et i(t) ; $\cos(\varphi)$ s'appelle le facteur de puissance du dipôle AB.

1.2) On peut écrire U = Z I, Z étant l'impédance réelle du dipôle AB. En passant aux notations complexes : $\underline{Z} = \frac{\underline{U}}{\underline{I}} = \frac{U_0}{I\sqrt{2}e^{j\varphi}}$; on voit donc que $\varphi = -$ argument de $\underline{Z}$.

Or $\underline{Z} = R + j(L\omega - \frac{1}{C\omega})$; donc $\cos(\varphi) = \frac{R}{Z} = \frac{R}{\sqrt{R^2 + (L\omega - \frac{1}{C\omega})^2}}$.

L'expression de la puissance devient : $\langle P\rangle = UI\cos(\varphi) = U\frac{U}{Z}\frac{R}{Z} = R\frac{U^2}{R^2 + (L\omega - \frac{1}{C\omega})^2}$

On voit qu'elle est maximale, pour U et R donnés, quand $L\omega_0 - \frac{1}{C\omega_0} = 0$; donc pour

$$\boxed{\omega_0 = \frac{1}{\sqrt{LC}}}$$

Pour cette pulsation, l'impédance Z est minimale et donc I est maximale ; on est à la résonance d'intensité.

1.3) La valeur maximale P_0 de $\langle P\rangle$, est alors égale à $\frac{U^2}{R}$; calculons les valeurs de ω pour lesquelles la puissance est égale à $\frac{P_0}{2}$; on résout : $R\frac{U^2}{R^2 + (L\omega - \frac{1}{C\omega})^2} = \frac{U^2}{2R}$.

Soit $(L\omega - \frac{1}{C\omega})^2 = R^2$ et donc $(L\omega - \frac{1}{C\omega}) = \pm R \Rightarrow LC\omega^2 \pm RC\omega - 1 = 0$.

Les solutions s'écrivent : $\omega = \frac{\pm RC \pm \sqrt{R^2C^2 + 4LC}}{2LC}$; et comme ω est positif, les racines sont : $\boxed{\omega_{min} = \frac{-RC + \sqrt{R^2C^2 + 4LC}}{2LC}}$ et $\boxed{\omega_{max} = \frac{RC + \sqrt{R^2C^2 + 4LC}}{2LC}}$

$\langle P\rangle$ sera donc au moins égal à la moitié de sa valeur maximale si $\omega_{min} < \omega < \omega_{max}$.

On constate que si $\omega \to 0$, alors $\langle P\rangle = R\frac{U^2}{R^2 + (L\omega - \frac{1}{C\omega})^2} \sim U^2C^2\omega^2 \to 0$.

De même si $\omega \to \infty$, alors $\langle P\rangle = R\frac{U^2}{R^2 + (L\omega - \frac{1}{C\omega})^2} \sim \frac{U^2}{L^2\omega^2} \to 0$.

Le facteur de qualité : $Q = \frac{\omega_0}{\omega_{max} - \omega_{min}} = \frac{\omega_0}{\frac{RC}{LC}}$; soit $\boxed{Q = \frac{L\omega_0}{R}}$

Q augmente si R diminue ; pour avoir un circuit de facteur de qualité grand, il faut diminuer la résistance. Si le facteur de qualité est élevé, on a une courbe de résonance très aiguë car la bande passante est étroite. On aura un filtre très sélectif qui ne laissera "passer" qu'une bande de pulsation étroite autour de ω_0 ; d'où le nom facteur de qualité.

1.4) Pour la bobine on aura : $\langle E_0\rangle = \frac{1}{2}L\langle i^2\rangle = \frac{1}{2}LI^2 2\langle\cos^2(\omega t + \varphi)\rangle = \frac{1}{2}LI^2$

car $\langle\cos^2(\omega t + \varphi)\rangle = \frac{1}{2}$. Or à la résonance : $I = \frac{U}{R} = \frac{U_0}{R\sqrt{2}}$;

donc $\boxed{\langle E_0\rangle = \frac{LU_0^2}{4R^2}}$ = énergie moyenne stockée dans la bobine sur une période.

Pour le condensateur, l'énergie moyenne stockée a la même expression, car $\frac{1}{2}L\langle i^2\rangle = \frac{1}{2}C\langle u_C^2\rangle$.

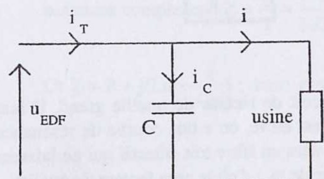
Or $P_0 = \frac{U^2}{R} = \frac{U_0^2}{2R}$ et $Q = \frac{L\omega_0}{R}$, on en déduit que $\langle E_0\rangle = \frac{LU_0^2}{4R^2}$ d'où $\boxed{\frac{2\omega_0\langle E_0\rangle}{P_0} = Q}$

Le rapport entre l'énergie stockée dans la bobine et le condensateur et la puissance dissipée par effet joule, augmente avec le facteur de qualité.

Problème n°15

d'après Mines d'Albi, Alès, Douai, Nantes

Il ne suffit pas de savoir produire de l'électricité, mais il faut éviter de la perdre inutilement. Les pertes en lignes constituent un gros problème car l'EDF n'a pas pour vocation à chauffer les oiseaux. Elle impose donc aux industriels de participer à la minimisation de ces pertes.



Pour l'EDF, U = 220 V (efficace) et f = 50 Hz.
Les intensités instantanées sont :
$i_T(t)$ pour la ligne EDF
i(t) pour l'alimentation de l'usine
$i_C(t)$ pour une batterie de condensateurs de compensation placée là pour relever le facteur de puissance de l'usine.

On notera I_T, I et Ic les valeurs efficaces respectives des trois intensités précédentes et $\underline{i}_T$, $\underline{i}$ et $\underline{i}_C$ leurs représentations en complexe. On pose $u_{EDF} = U\sqrt{2}\cos(2\pi ft)$ et $\underline{u}_{EDF}$ sa représentation en complexe.

1a) L'usine consomme une puissance moyenne P = 100 kW. Elle a un facteur de puissance de 0,8. Calculer l'intensité efficace I.

1b) L'usine a un caractère inductif à cause de ses machines. Représenter dans le plan complexe $\underline{u}_{EDF}$ et $\underline{i}$ en prenant comme référence de phase $u_{EDF}(t)$ (ou bien faire une représentation de Fresnel). *Schéma qualitatif ; pas d'échelle imposée.*

2a) On désire que le facteur de puissance de l'ensemble (usine + batterie de condensateurs) soit maximal. Comment est alors le courant $i_T(t)$ par rapport à $u_{EDF}(t)$?

2b) Rajouter la représentation de $i_c(t)$ sur la figure du **1b**) de manière à ce que le **2a**) soit réalisé.

2c) Calculer numériquement la valeur efficace I_c, puis la valeur que doit avoir la capacité C. Les condensateurs prennent-ils de la place ?

3) Sachant que les pertes en ligne sont proportionnelles au carré de la valeur efficace I_T (loi de Joule), calculer en pourcentage l'économie réalisée par l'EDF, l'industriel consommant toujours la même puissance.

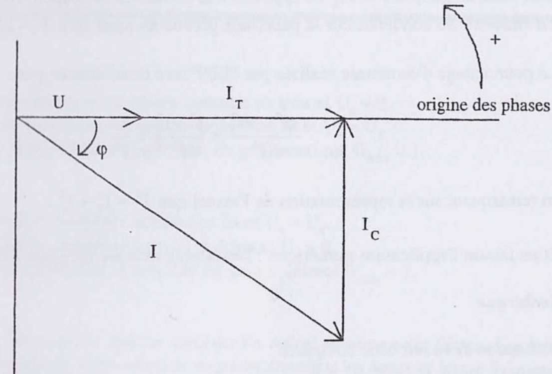
Corrigé

1a) La puissance moyenne consommée est donnée par : $P = UI\cos(\varphi)$; U est la valeur efficace de la tension, I celle de l'intensité et φ est le déphasage de l'intensité par rapport à la tension ; cos(φ) correspond au facteur de puissance de l'usine ; donc ici cos(φ) = 0,8.

On tire donc directement : $I = \frac{P}{U\cos(\varphi)} = \frac{10^5}{220.0,8}$. Soit $\boxed{I = 568\ \text{A}}$

1b) L'usine ayant un caractère inductif, on en déduit que l'intensité est en retard sur la tension ; donc φ est négatif ; $\cos(\varphi) = 0,8 \Rightarrow \varphi = -36,9°$.

Représentation de Fresnel :



La tension u_{EDF} est représentée par un vecteur de longueur U et faisant un angle nul avec la direction prise comme origine des phases. ; l'intensité i(t) est représentée par un vecteur de longueur I et faisant un angle φ = – 36,9°.

Remarque

Sur le schéma, on peut donner aux vecteurs de Fresnel, une longueur correspondant aux valeurs efficaces ou aux valeurs maximales ; ici on a fait le choix des valeurs efficaces.

2a) Si le facteur de puissance de l'ensemble est maximal, c'est donc qu'il sera égal à 1. Le courant $i_T(t)$ sera donc en phase avec $u_{EDF}(t)$.

2b) Le courant dans un condensateur pur est en avance de 90° par rapport à la tension. Le vecteur de Fresnel représentant $i_C(t)$ fera donc un angle de +90° avec la direction prise comme origine. Par ailleurs, d'après la loi des noeuds que l'on peut appliquer aux courants instantanés : $i_T = i + i_C$. La somme des vecteurs représentant i et i_C doit donc

donner le vecteur représentant i_T et qui doit être en phase avec $u_{EDF}(t)$. Ceci est réalisé sur le schéma précédent.

2c) A partir de la représentation de Fresnel, on a directement : $|\sin(\varphi)| = \frac{I_C}{I}$ et donc

$I_C = I|\sin(\varphi)| = \frac{P}{U\cos(\varphi)}|\sin(\varphi)| = \frac{P}{U}|\tan(\varphi)|$. Soit $\boxed{I_C = 341\ A}$

Or $U = Z_C I_C$ où $Z_C = \frac{1}{C\omega}$ représente l'impédance du condensateur ; donc $C = \frac{I_C}{U\omega}$;

soit $\boxed{C = 4{,}93.10^{-3}\ F = 4{,}93\ mF}$

3) La puissance perdue en ligne est proportionnelle au carré de la valeur efficace I_T. On peut donc écrire que $P = kI_T^2$ en appelant k la constante de proportionnalité.
En l'absence de condensateur la puissance perdue en ligne sera $P' = kI^2$.

Le pourcentage d'économie réalisée par l'EDF sera donc donnée par :

$$\frac{kI^2 - kI_T^2}{kI^2} = \frac{I^2 - I_T^2}{I^2} = \frac{I_C^2}{I^2}$$

en remarquant sur la représentation de Fresnel que $I^2 = I_T^2 + I_C^2$.

Et en faisant l'application numérique : l'économie réalisée est égale à 0,36 soit 36 %.

Remarque

Utilisation de la méthode complexe.

On peut représenter les courants par leur notation complexe : $\underline{i}, \underline{i_T}, \underline{i_C}$ *et en appliquant la loi des noeuds :* $\underline{i_T} = \underline{i} + \underline{i_C}$ *et* $\underline{I_T}e^{j\omega t} = \underline{I}e^{j\omega t} + \underline{I_C}e^{j\omega t}$ *soit également*

$\underline{I_T} = \underline{I} + \underline{I_C}$ *avec* $\underline{I} = I\sqrt{2}e^{j\varphi}$ *et* $\underline{I_C} = I_C\sqrt{2}\,e^{j\frac{\pi}{2}}$ *; donc* $\underline{I_T} = I\sqrt{2}\,e^{j\varphi} + I_C\sqrt{2}\,e^{j\frac{\pi}{2}}$.

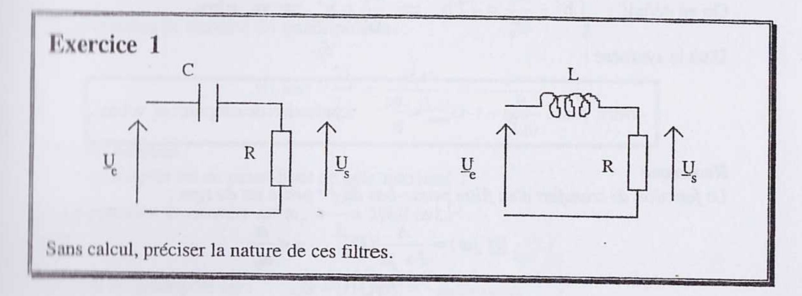
Or on veut que $i_T(t)$ soit en phase avec $u_{EDF}(t)$ dont la phase à l'origine est nulle. Il faut donc que l'argument de $\underline{I_T}$ *soit nul et donc que la partie imaginaire de* $\underline{I_T}$ *soit nulle. Ceci se transcrit par :* $I\sqrt{2}\sin(\varphi) + I_C\sqrt{2} = 0$ *et donc :* $I_C = -I\sin(\varphi) = I|\sin(\varphi)|$ *puisque* $\varphi < 0$.

On retrouve bien le résultat obtenu à la question 2c) avec la représentation de Fresnel.

Quadripôles et filtrage d'un signal

Les amplificateurs opérationnels utilisés dans les montages sont idéaux et alimentés par une alimentation ± 15 V.

Exercice 1



Sans calcul, préciser la nature de ces filtres.

filtre RC
$\omega \to 0$ le condensateur se comporte comme un trou et $U_s = 0$.
$\omega \to \infty$ le condensateur se comporte comme un fil et $U_s = U_e$.
Ce filtre RC est donc un filtre passe-haut de gain maximal $G_{max} = 1$.

filtre RL
$\omega \to 0$ la bobine se comporte comme un fil et $U_s = U_e$.
$\omega \to \infty$ la bobine se comporte comme un trou et $U_s = 0$.
Ce filtre RL est donc un filtre passe-bas de gain maximal $G_{max} = 1$.

Remarque
Il est important de pouvoir trouver sans aucun calcul la nature des filtres. Les bobines et les condensateurs se comportant de manière simpliste en haute et basse fréquence, il est en général facile de trouver la nature des quadripôles.

Exercice 2

Préciser les caractéristiques d'un filtre admettant une fonction de transfert de la forme :

$$\underline{H}(j\omega) = \frac{a}{b + j\frac{\omega}{\omega_0}} \quad a > 0 \text{ et } b > 0$$

$\omega \to 0$: $\underline{H}(j\omega) = \frac{a}{b}$ $\qquad$ $\omega \to \infty$: $\underline{H}(j\omega) = 0$

Ce filtre est donc un filtre passe-bas de gain maximal $G_{max} = \frac{a}{b}$. Calculons sa pulsation de coupure ω_c. Nous devons avoir :

$$G(\omega_c) = \frac{a}{\sqrt{b^2 + \frac{\omega_c^2}{\omega_0^2}}} = \frac{G_{max}}{\sqrt{2}} = \frac{a}{b\sqrt{2}}$$

On en déduit : $\sqrt{b^2 + \frac{\omega_c^2}{\omega_0^2}} = \sqrt{2}\,b \Rightarrow \frac{\omega_c^2}{\omega_0^2} = b^2 \Rightarrow \omega_c = b\omega_0$

D'où la synthèse :

- filtre passe-bas	- $G_{max} = \frac{a}{b}$	- pulsation de coupure : $\omega_c = b\omega_0$

Remarque

La fonction de transfert d'un filtre passe-bas du 1er ordre est du type :

$$\underline{H}(j\omega) = \frac{A}{1+jx} \quad (1) \qquad x = \frac{\omega}{\omega_0}$$

On en déduit : $G_{max} = |A|$ *et* $\omega_c = \omega_0$ $\left(\frac{|A|}{\sqrt{2}} = \frac{|A|}{\sqrt{1+x_c^2}} \Rightarrow x_c = 1\right)$. *Dans un exercice, on a donc tout intérêt à se ramener à une expression normalisée du type (1) car les résultats sont alors immédiats. Dans l'exercice précédent, on peut ainsi normaliser* $\underline{H}(j\omega)$ *de la manière suivante :*

$$\underline{H}(j\omega) = \frac{a}{b + j\frac{\omega}{\omega_0}} = \frac{\frac{a}{b}}{1 + j\frac{\omega}{b\omega_0}}$$

On en tire immédiatement les résultats :

- *passe-bas* - $G_{max} = \frac{a}{b}$ - $\omega_c = b\omega_0$

Par similitude, la fonction de transfert d'un filtre passe-haut du 1er ordre de gain maximal $|A|$ *et de pulsation de coupure* $\omega_c = \omega_0$ *est du type :*

$$\underline{H}(j\omega) = \frac{A}{1 + \frac{1}{jx}}$$

Exercice 3

R

U_e L U_s

R = 100 Ω
L = 20 mH

1) Etudier le comportement asymptotique de ce quadripôle. Conclusion ?
2) Tracer la courbe du gain en décibel $G_{dB} = f(\text{Log}\omega)$.
3) A l'aide du graphique, donner les valeurs de G pour ω = 10, 1000 et 100000 rad.s⁻¹.

1) $\omega \to 0$ la bobine se comporte comme un fil et $U_s = 0$.
$\omega \to \infty$ la bobine se comporte comme un trou et $U_s = U_e$.

Ce filtre est donc un filtre passe-bas de gain maximal G_{max}=1

2) La fonction de transfert du quadripôle est :

$$\underline{H}(j\omega) = \frac{\underline{U}_s}{\underline{U}_e} = \frac{jL\omega}{R + jL\omega} = \frac{1}{1 + \frac{R}{jL\omega}}$$

D'où les résultats :
- Le quadripôle est un passe-haut de gain maximal 1
- La pulsation de coupure est $\omega_c = \frac{R}{L} = 5000$ rad.s⁻¹.

Le gain du quadripôle est : $G = |\underline{H}(j\omega)| = \frac{1}{\sqrt{1 + \frac{R^2}{L^2\omega^2}}}$

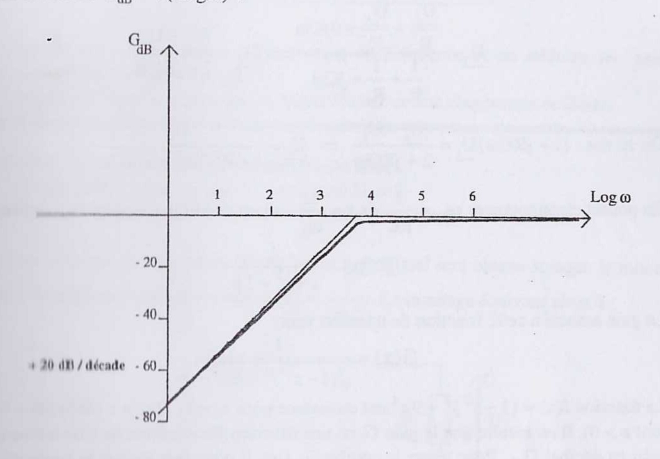
Pour tracer la courbe $G_{dB} = f(\text{Log}\omega)$, il nous faut étudier les asymptotes :

$$\omega \to 0 \quad G = \frac{L\omega}{R} = \frac{\omega}{\omega_c} \Rightarrow G_{dB} = 20\text{Log}\omega - 20\text{Log}\omega_c = 20\text{Log}\omega - 74 \text{ dB}$$

$$\omega \to \infty \quad G = 1 \Rightarrow G_{dB} = 0$$

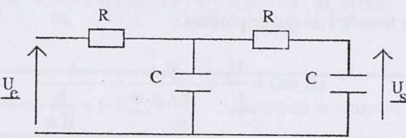
$$\omega = \omega_c \quad G = \frac{1}{\sqrt{2}} \Rightarrow G_{dB} = -3 \text{ dB}$$

D'où la courbe $G_{dB} = f(\text{Log}\omega)$:



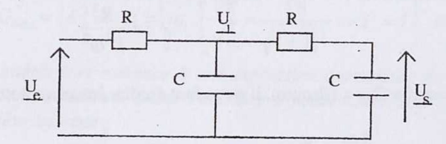
Exercice 5

Peut-on prévoir sans calcul la nature de ce filtre ? Vérifier le résultat en calculant sa fonction de transfert et tracer l'allure de la courbe $G_{dB}(\omega)$ où G_{dB} désigne le gain en décibel du filtre .



Ce filtre est constitué de 2 cellules RC mises en série. Chacune d'elles se comportant comme un filtre passe-bas du 1er ordre, on peut prévoir que l'ensemble se comporte comme un filtre passe-bas du 2ème ordre.

Calculons la fonction de transfert du filtre :



Nous avons : $\underline{U}_s = \dfrac{\dfrac{1}{jC\omega}}{R + \dfrac{1}{jC\omega}} \underline{U}_1 = \dfrac{1}{1 + jRC\omega} \underline{U}_1$

Calculons U_1 en utilisant le théorème de Millman :

$$\underline{U}_1 = \frac{\dfrac{U_e}{R} + \dfrac{U_s}{R} + 0jC\omega}{\dfrac{1}{R} + \dfrac{1}{R} + jC\omega} \Rightarrow \underline{U}_1 = \frac{U_e + U_s}{2 + jRC\omega}$$

On en tire : $(1 + jRC\omega)\underline{U}_s = \dfrac{U_e + U_s}{2 + jRC\omega} \Rightarrow \underline{U}_s = \dfrac{U_e}{1 - R^2C^2\omega^2 + 3jRC\omega}$

En posant classiquement $\omega_0 = \dfrac{1}{RC}$ et $x = \dfrac{\omega}{\omega_0}$, on en déduit la fonction de transfert :

$$\underline{H}(jx) = \frac{1}{1 - x^2 + 3jx}$$

Le gain associé à cette fonction de transfert vaut :

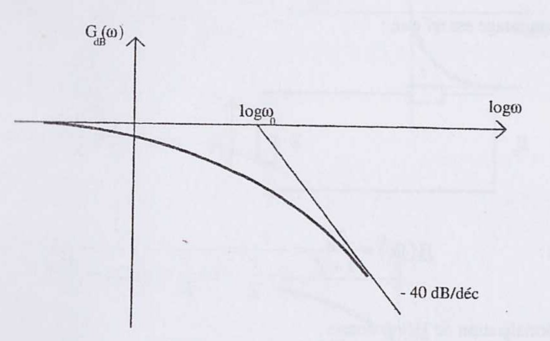
$$G(x) = \frac{1}{\sqrt{(1 - x^2)^2 + 9x^2}}$$

La fonction $f(x) = (1 - x^2)^2 + 9x^2$ est croissante pour $x > 0$ ($f'(x) = x\,(4x^2+14) > 0$ pour tout $x > 0$). Il en résulte que le gain G est une fonction décroissante de x de même que le gain en décibel G_{dB}. Pour tracer la courbe $G_{dB}(\omega)$, il nous faut étudier le comportement asymptotique :

$\omega \to 0 \quad x \to 0 \quad G(0) = 1 \quad$ asymptote $G_{dB} = 0$

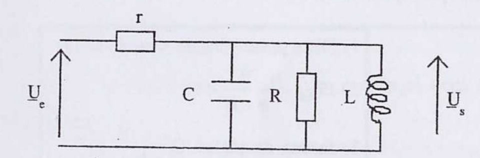
$\omega \to \infty \quad x \to \infty \quad G(x) = \dfrac{1}{x^2} \quad$ asymptote $G_{dB} = -40 \log x = -40\log\omega + 40\log\omega_0$

D'où l'allure de la courbe $G_{dB}(\omega)$:



Exercice 6

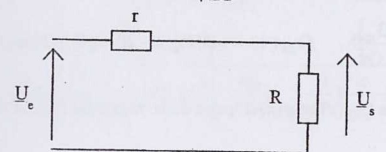
On considère le filtre suivant :



1) Etudier son comportement asymptotique en fréquence et en déduire sa nature. Peut-on prévoir son gain maximal ?
2) Calculer sa fonction de transfert et tracer l'allure de son diagramme de Bode.

1) Etudions le comportement asymptotique du filtre.
$\omega \to 0$: la bobine court-circuite la sortie d'où $U_s = 0$.
$\omega \to \infty$: le condensateur court-circuite la sortie d'où $U_s = 0$.

Le filtre est donc du type passe-bande. Le gain maximal sera obtenu lorsque le montage L // C "bouchonne" pour la pulsation $\omega_0 = \dfrac{1}{\sqrt{LC}}$. Le montage équivaut alors à :



Nous aurons ainsi : $U_s = \frac{R}{r+R}U_e \Rightarrow \boxed{G_{max} = \frac{U_s}{U_e} = \frac{R}{r+R}}$

2) Le montage est tel que :

r, U_e, Z, U_s avec $\frac{1}{\underline{Z}} = \frac{1}{R} + j(C\omega - \frac{1}{L\omega})$

D'où : $\underline{H}(j\omega) = \frac{\underline{Z}}{r+\underline{Z}} = \frac{1}{1+\frac{r}{\underline{Z}}} = \frac{1}{1+\frac{r}{R}+jr(C\omega-\frac{1}{L\omega})}$

La normalisation de $\underline{H}(j\omega)$ donne :

$$\underline{H}(j\omega) = \frac{\frac{R}{R+r}}{1+j\frac{rR}{R+r}\sqrt{\frac{C}{L}}\left(\frac{\omega}{\omega_0}-\frac{\omega_0}{\omega}\right)} \quad \text{avec } \omega_0 = \frac{1}{\sqrt{LC}}$$

On en tire les principaux résultats :

1) Filtre passe – bande centré sur ω_0

2) $G_{max} = \frac{R}{r+R} < 1$

3) facteur de qualité $Q = \frac{rR}{R+r}\sqrt{\frac{C}{L}}$

Posons $x = \frac{\omega}{\omega_0}$. Nous obtenons : $\underline{H}(jx) = \frac{G_{max}}{1+jQ(x-\frac{1}{x})}$

et donc : $G(x) = \frac{G_{max}}{\sqrt{1+Q^2(x-\frac{1}{x})^2}}$ $\quad \tan\varphi = Q(\frac{1}{x}-x)$ avec $\forall x \ \cos\varphi > 0$

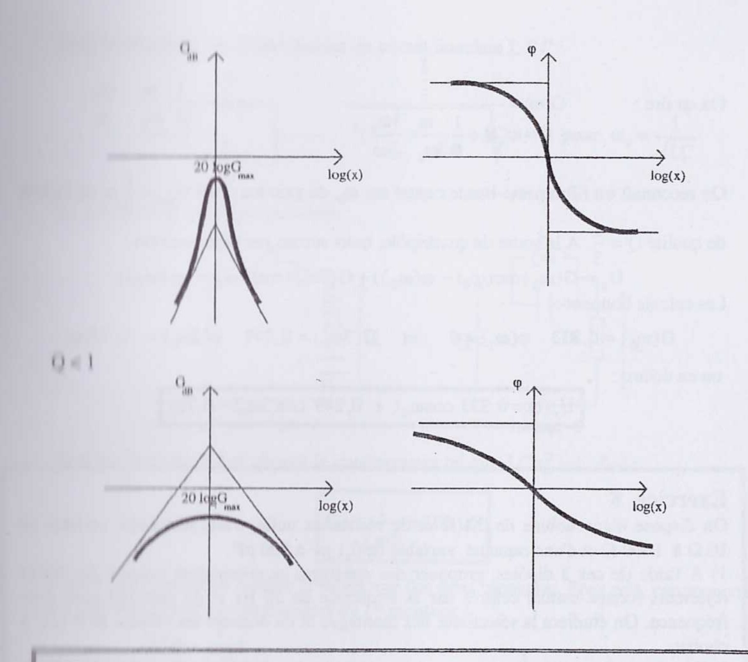
$x \to 0 \quad G(x) = \frac{G_{max}x}{Q} \quad G_{dB}(x) = 20\log x - 20\log Q + 20\log G_{max} \quad \varphi = \frac{\pi}{2}$

$x = 1 \quad G(x) = G_{max} \quad G_{dB}(x) = 20\log G_{max} < 0 \quad \varphi = 0$

$x \to \infty \quad G(x) = \frac{G_{max}}{Qx} \quad G_{dB}(x) = -20\log x - 20\log Q + 20\log G_{max} \quad \varphi = -\frac{\pi}{2}$

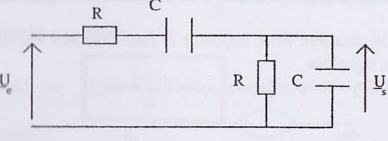
L'allure des courbes $G_{dB}(x)$ et $\varphi(x)$ dépend de la valeur du facteur de qualité Q :

Q > 1



Exercice 7

Dans le montage suivant la tension d'entrée est : $U_e(t) = \cos(\omega_0 t) + \cos(3\omega_0 t)$ avec $\omega_0 = \frac{1}{RC}$. Calculer $U_s(t)$.



Calculons la fonction de transfert du quadripôle.

$$\underline{H}(j\omega) = \frac{\underline{Z}_{R//C}}{R+\frac{1}{jC\omega}+\underline{Z}_{R//C}} = \frac{1}{1+(R+\frac{1}{jC\omega})\frac{1}{\underline{Z}_{R//C}}} = \frac{1}{1+(R+\frac{1}{jC\omega})(\frac{1}{R}+jC\omega)}$$

D'où : $\underline{H}(j\omega) = \frac{1}{3+jRC\omega+\frac{1}{jRC\omega}} = \frac{1}{3+j(\frac{\omega}{\omega_0}-\frac{\omega_0}{\omega})} = \frac{\frac{1}{3}}{1+\frac{1}{3}j(\frac{\omega}{\omega_0}-\frac{\omega_0}{\omega})}$

On en tire : $G(\omega)=\dfrac{\frac{1}{3}}{\sqrt{1+\frac{1}{9}(\frac{\omega}{\omega_0}-\frac{\omega_0}{\omega})^2}}$ $\qquad \tan\varphi=-\frac{1}{3}(\frac{\omega}{\omega_0}-\frac{\omega_0}{\omega})$

On reconnaît un filtre passe-bande centré sur ω_0, de gain maximal $G_{max}=\frac{1}{3}$ et de facteur de qualité $Q=\frac{1}{3}$. A la sortie du quadripôle, nous aurons par superposition :

$$U_s=G(\omega_0)\cos(\omega_0 t+\varphi(\omega_0))+G(3\omega_0)\cos(3\omega_0 t+\varphi(3\omega_0))$$

Les calculs donnent :

$$G(\omega_0)=0{,}333 \quad \varphi(\omega_0)=0 \quad \text{et} \quad G(3\omega_0)=0{,}249 \quad \varphi(3\omega_0)=-0{,}72\,\text{rad}$$

on en déduit :

$$\boxed{U_s(t)=0{,}333\,\cos\omega_0 t\;+\;0{,}249\,\cos(3\omega_0 t-0{,}72)}$$

Exercice 8

On dispose d'une bobine de 0,1 H et de résistance nulle, d'une résistance variable de 10 Ω à 1000 Ω et d'une capacité variable de 0,1 µF à 500 µF.

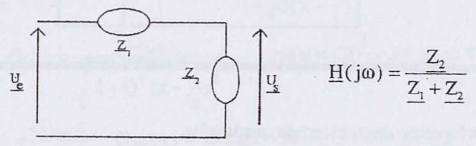
1) A l'aide de ces 3 dipôles, proposer des montages se comportant comme des filtres réjecteurs (coupe-bande) centrés sur la fréquence de 50 Hz et de gain nul pour cette fréquence. On étudiera la sélectivité des montages et on donnera les valeurs de R et C à choisir.

2) En prenant le meilleur montage, préciser alors le signal $V_s(t)$ que l'on récupérerait à la sortie du filtre si le signal d'entrée est un signal de faible amplitude, parasité par le secteur, du type :

$$V_e(t)=5\cos(4\omega_0 t)+0{,}1\cos(\omega_0 t)$$ (ω_0 désigne la pulsation du secteur).

1) Cherchons la manière avec laquelle il faut disposer les trois dipôles R, L, C pour obtenir ce filtre réjecteur.

A priori, un tel filtre va se présenter sous la forme :



$$\underline{H}(j\omega)=\frac{\underline{Z_2}}{\underline{Z_1}+\underline{Z_2}}$$

Si l'on cherche un filtre réjecteur tel que $G(\omega_0)=0$, il y a deux solutions possibles :

1) Choisir $\underline{Z_2}$ telle que $\underline{Z_2}(\omega_0)=0$.

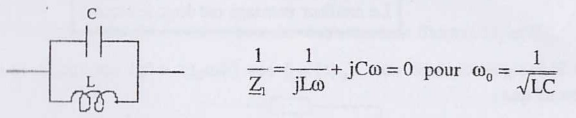
2) Choisir $\underline{Z_1}$ telle que $\underline{Z_1}(\omega_0)$ soit infinie.

Dans le premier cas, il faut monter L et C en série :

L C

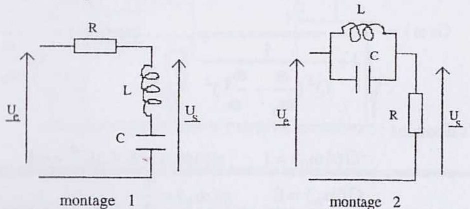
$$Z_2=j(L\omega-\frac{1}{C\omega})=0 \quad \text{pour} \quad \omega_0=\frac{1}{\sqrt{LC}}$$

Dans le deuxième cas, il faut monter un circuit bouchon L // C :



$$\frac{1}{\underline{Z_1}}=\frac{1}{jL\omega}+jC\omega=0 \quad \text{pour} \quad \omega_0=\frac{1}{\sqrt{LC}}$$

Il y a donc deux montages possibles :



Dans les deux cas, il faut choisir le condensateur tel que $LC\omega_0^2=1$, d'où :

$$\boxed{C=\frac{1}{L\omega_0^2}=101\ \mu F}$$

Il nous faut maintenant étudier la sélectivité des deux montages. Pour cela, commençons par calculer la fonction de transfert du 1er montage :

$$\underline{H}(j\omega)=\frac{j(L\omega-\frac{1}{C\omega})}{R+j(L\omega-\frac{1}{C\omega})}=\frac{1}{1+\dfrac{R}{j(L\omega-\frac{1}{C\omega})}}=\frac{1}{1+\dfrac{1}{j\frac{L\omega_0}{R}(\frac{\omega}{\omega_0}-\frac{\omega_0}{\omega})}}=\frac{1}{1+\dfrac{1}{jQ(x-\frac{1}{x})}}$$

Le facteur de qualité du réjecteur vaut $Q=\frac{L\omega_0}{R}$, et il faut donc prendre la valeur minimale de R pour avoir Q maximum.

$$R=10\,\Omega \;\Rightarrow\; \boxed{Q=\frac{L\omega_0}{R}=3{,}1}$$

Pour le deuxième montage :

$$\underline{H}(j\omega)=\frac{R}{R+\dfrac{jL\omega\frac{1}{jC\omega}}{j(L\omega-\frac{1}{C\omega})}}=\frac{1}{1+\dfrac{1}{jR\sqrt{\frac{C}{L}}(\frac{\omega}{\omega_0}-\frac{\omega_0}{\omega})}}=\frac{1}{1+\dfrac{1}{jQ(x-\frac{1}{x})}}$$

Le facteur de qualité vaut $Q=R\sqrt{\frac{C}{L}}=RC\omega_0=\frac{R}{L\omega_0}$, et il faut ici prendre la plus grande résistance R possible, c'est à dire : R = 1000 Ω $\Rightarrow$ $\boxed{Q=\frac{R}{L\omega_0}=31{,}7}$

Le meilleur montage est donc le second

2) Si le signal d'entrée vaut $V_e(t) = 5\cos(4\omega_0 t) + 0,1\cos(\omega_0 t)$, le signal de sortie sera tel que :

$$V_s(t) = 5\,G(4\omega_0)\cos(4\omega_0 t + \varphi(4\omega_0)) + 0,1\,G(\omega_0)\cos(\omega_0 t + \varphi(\omega_0))$$

avec :

$$G(\omega) = \frac{1}{\sqrt{1 + \frac{1}{Q^2(\frac{\omega}{\omega_0} - \frac{\omega_0}{\omega})^2}}} \qquad \tan\varphi(\omega) = \frac{1}{Q(\frac{\omega}{\omega_0} - \frac{\omega_0}{\omega})}$$

Les calculs donnent :

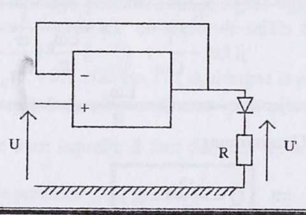
$$G(4\omega_0) = 1 \qquad \varphi(4\omega_0) = 8,4.10^{-3} << 1$$
$$G(\omega_0) = 0 \qquad \varphi(\omega_0) = \frac{\pi}{2}$$

D'où le signal de sortie :

$$\boxed{V_s(t) = 5\cos(4\omega_0 t)}$$

Exercice 9

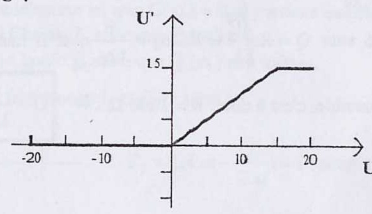
Dans le montage suivant, La tension U est une tension continue et la diode est idéale. Tracer le graphe U' = f(U) pour -20 Volts < U < +20 Volts.



Le montage correspond à un suiveur et la tension U' ne peut être que positive vu le sens passant de la diode. Nous aurons donc :

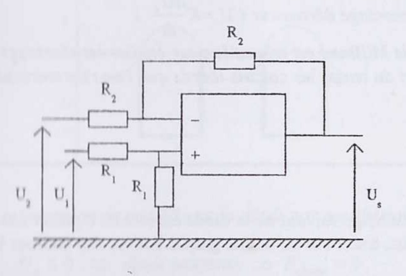
-20 V < U < 0 U' = 0
0 < U < 15 V U' = U
15 V < U < 20 V U' = 15 V (saturation de l'AO)

D'où le graphe de U' :

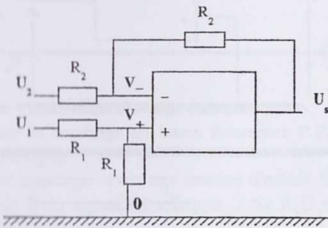


Exercice 10

Exprimer la tension de sortie U_s en fonction des deux tensions d'entrée U_1 et U_2.



Appliquons le théorème de Millman aux entrées inverseuse et non inverseuse. Pour cela, repérons les potentiels des différents noeuds.



A l'entrée non inverseuse :

$$V_+ = \frac{\frac{U_1}{R_1} + \frac{0}{R_1}}{\frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_1}} = \frac{U_1}{2}$$

(Le diviseur de tension entre U_1 et la masse donne aussi rapidement le résultat)

A la borne inverseuse :

$$V_- = \frac{\frac{U_2}{R_2} + \frac{U_s}{R_2}}{\frac{1}{R_2} + \frac{1}{R_2}} \Rightarrow V_- = \frac{U_2 + U_s}{2}$$

L'AO fonctionnant en régime linéaire, nous avons $V_+ = V_-$ d'où :

$$\boxed{U_s = U_1 - U_2}$$

Remarques

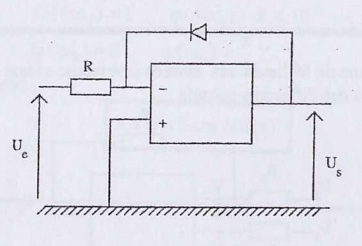
1) Vu le résultat final, un tel montage est appelé "soustracteur". Beaucoup de montages présentent une relation entre la tension de sortie et la (les) tension(s) d'entrée qui permet d'attribuer un nom particulier. On peut citer par exemple : montage suiveur

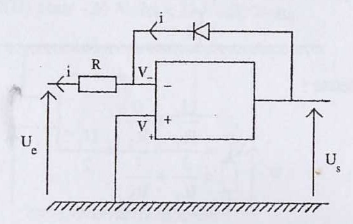
($U_s=U_e$), montage amplificateur non inverseur ($U_s=KU_e$), montage amplificateur inverseur ($U_s=-KU_e$), montage sommateur ($U_s=U_1+U_2$), montage intégrateur ($U_s=K\int U_e dt$), montage dérivateur ($U_s=K\frac{dU_e}{dt}$).

2) Le théorème de Millman est très utile pour étudier les montages comportant des AO. Il évite la plupart du temps les calculs lourds que l'on rencontrerait en utilisant les lois de Kirchhoff.

Exercice 11

On considère le montage suivant où la diode est idéale. U_e étant une tension sinusoïdale d'amplitude 5 volts, tracer sur un même graphe l'allure des courbes $U_e(t)$ et $U_s(t)$.





Si l'AO fonctionne en régime linéaire, nous aurons $V_+ = V_- = 0$.

$U_e \leq 0$

La diode est dans le sens passant. Nous avons $i = -\frac{U_e}{R}$ et la tension aux bornes de la diode étant nulle, l'AO fonctionne bien en régime linéaire d'où :

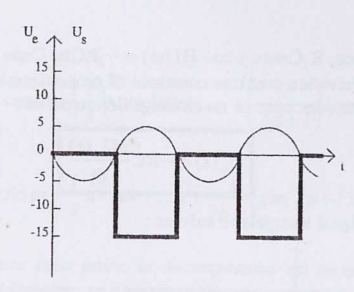
$$\boxed{U_s = 0}$$

$U_e \geq 0$

La diode est bloquée. Nous avons alors $i = 0$, $V_- = U_e$, $V_+ = 0$. L'AO fonctionne en régime saturé et :

$$\boxed{U_s = -15V}$$

Le graphe des courbes $U_e(t)$ et $U_s(t)$ est le suivant :



Remarque

On peut résoudre cet exercice en modélisant la diode par un résistor avec l'équivalence suivante :

$$U_e \leq 0 \;\Rightarrow\; \textit{diode passante} \;\Rightarrow\; R_{diode} = 0$$
$$U_e \geq 0 \;\Rightarrow\; \textit{diode bloquée} \;\Rightarrow\; R_{diode} = \infty$$

Le montage est ainsi assimilable à un montage inverseur $U_s = -\frac{R_{diode}}{R}U_e$ *et les résultats sont immédiats.*

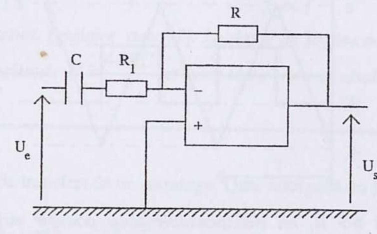
Exercice 12

1) Calculer la fonction de transfert du montage suivant.

2) Comment se comporte le montage en basse fréquence ? Préciser alors la relation mathématique liant $U_s(t)$ à $U_e(t)$.

3) On fait fonctionner ce montage avec une tension d'entrée U_e de forme triangulaire d'amplitude E. La période T du signal est telle que $T >> R_1C$ et le montage est réalisé avec $R >> R_1$.

Préciser la nature du signal $U_s(t)$ et tracer sur un même graphe l'allure des signaux $U_e(t)$ et $U_s(t)$.



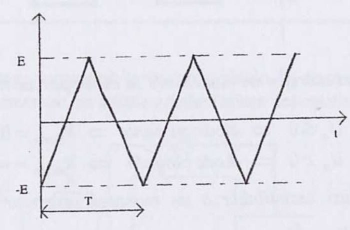
1) Le montage est du type "inverseur" et en notation complexe :

$$\boxed{\underline{H}(j\omega) = \frac{\underline{U_s}}{\underline{U_e}} = -\frac{R}{R_1 + \frac{1}{jC\omega}} = -\frac{jRC\omega}{1 + jR_1C\omega}}$$

2) En basse fréquence, $R_1C\omega << 1 \Rightarrow \underline{H}(j\omega) = -jRC\omega$. Cette fonction de transfert correspond à une dérivation avec une constante de proportionnalité égale à -RC. Le montage se comporte donc comme un montage dérivateur et :

$$\boxed{U_s(t) = -RC\frac{dU_e(t)}{dt}}$$

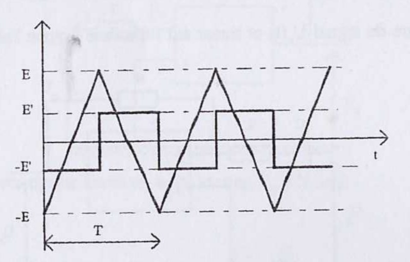
3) Considérons le signal triangulaire suivant :



$0 < t < \frac{T}{2}$: $U_e(t) = at + b = \frac{4E}{T}t - E \Rightarrow U_s(t) = -RC\frac{dU_e(t)}{dt} = -\frac{4RCE}{T}$

$\frac{T}{2} < t < T$: $U_e(t) = -at + b' = -\frac{4E}{T}t + 3E \Rightarrow U_s(t) = -RC\frac{dU_e(t)}{dt} = +\frac{4RCE}{T}$

$$\boxed{\text{Le signal } U_s(t) \text{ est donc un signal créneau d'amplitude } E' = \frac{4RCE}{T}}$$



Remarques

1) La condition $R >> R_1$ est indispensable pour pouvoir visionner $U_s(t)$ avec une amplitude correcte. En effet, le montage est assimilable à un montage dérivateur que si $T >> R_1C$ et ceci implique que $\frac{4R_1CE}{T}$ est une tension très faible. L'amplitude du signal de sortie valant $\frac{4RCE}{T}$, il faut donc bien prendre $R >> R_1$.

2) Il est intéressant dans cet exercice de faire intervenir les séries de Fourier des signaux "triangulaire" et "créneau", et de voir le lien mathématique avec la fonction de transfert $\underline{H}(j\omega) = -jRC\omega$.

Si l'on considère les signaux d'amplitude E et E' représentés sur le graphe, on peut montrer que leur décomposition en série de Fourier est respectivement :

Signal triangulaire :

$$U_e(t) = -\frac{8E}{\pi^2}\left(\cos\omega t + \left(\frac{1}{3}\right)^2\cos 3\omega t + ... + \left(\frac{1}{2p+1}\right)^2\cos(2p+1)\omega t + ...\right)$$

Signal créneau :

$$U_s(t) = -\frac{4E'}{\pi}\left(\sin\omega t + \frac{1}{3}\sin 3\omega t + ... + \frac{1}{2p+1}\sin(2p+1)\omega t + ...\right)(1)$$

La fonction triangulaire étant paire, la décomposition est en $\cos(n\omega t)$, tandis que la fonction créneau étant impaire, sa décomposition ne comporte que des $\sin(n\omega t)$.

La fonction de transfert $\underline{H}(j\omega') = -jRC\omega'$ correspond à un gain $G(\omega') = RC\omega'$ et à une phase $\varphi(\omega') = -\frac{\pi}{2}$. Si le signal d'entrée du montage est :

$$U_e(t) = -\frac{8E}{\pi^2}\left(\cos\omega t + \left(\frac{1}{3}\right)^2\cos 3\omega t + ... + \left(\frac{1}{2p+1}\right)^2\cos(2p+1)\omega t + ...\right)$$

Nous aurons à la sortie en prenant $\omega' = (2p+1)\omega$ pour chaque terme :

$$U_s(t) = -\frac{8E}{\pi^2}\left(RC\omega\cos(\omega t - \frac{\pi}{2}) + ... + \left(\frac{1}{2p+1}\right)^2(RC(2p+1)\omega)\cos((2p+1)\omega t - \frac{\pi}{2}) + ...\right)$$

$$U_s(t) = -\frac{8ERC\omega}{\pi^2}\left(\cos(\omega t - \frac{\pi}{2}) + \frac{1}{3}\cos(3\omega t - \frac{\pi}{2}) + ... + \frac{1}{2p+1}\cos((2p+1)\omega t - \frac{\pi}{2}) + ...\right)$$

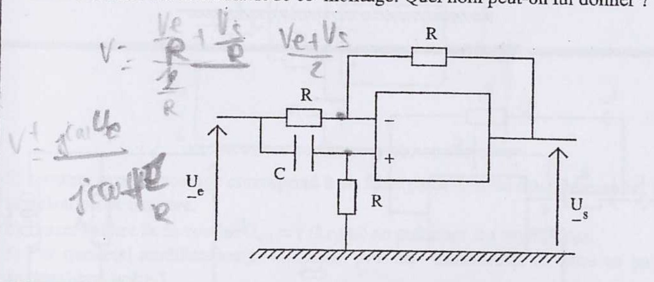
comme $\omega = \frac{2\pi}{T}$ et $\cos(x - \frac{\pi}{2}) = \sin x$, il vient :

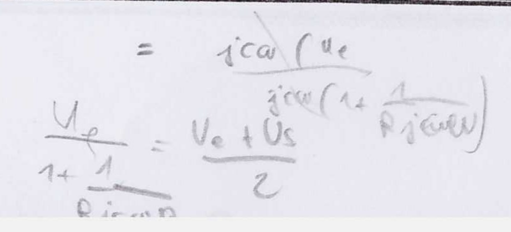
$$U_s(t) = -\frac{16ERC}{T\pi}\left(\sin\omega t + \frac{1}{3}\sin 3\omega t + ... + \frac{1}{2p+1}\sin(2p+1)\omega t + ...\right)$$

On trouve une expression similaire avec (1). Le signal de sortie correspond donc à un signal créneau d'amplitude $E' = \frac{4ERC}{T}$ et nous retrouvons le résultat de l'exercice.

Exercice 13

Calculer la fonction de transfert de ce montage. Quel nom peut-on lui donner ?





Appliquons le théorème de Millman aux bornes inverseuse et non inverseuse de l'AO :

$$\underline{U}_- = \frac{\frac{\underline{U}_s}{R}+\frac{\underline{U}_e}{R}}{\frac{2}{R}} = \frac{\underline{U}_s+\underline{U}_e}{2} \qquad \underline{U}_+ = \frac{jC\omega \underline{U}_e + \frac{0}{R}}{jC\omega + \frac{1}{R}} = \frac{jRC\omega}{1+jRC\omega}\underline{U}_e$$

En fonctionnement linéaire, nous avons $\underline{U}_+ = \underline{U}_-$ d'où :

$$\frac{\underline{U}_s+\underline{U}_e}{2} = \frac{jRC\omega}{1+jRC\omega}\underline{U}_e \Rightarrow \underline{U}_s = \left(\frac{2jRC\omega}{1+jRC\omega}-1\right)\underline{U}_e = -\frac{1-jRC\omega}{1+jRC\omega}\underline{U}_e$$

On en tire la fonction de transfert :

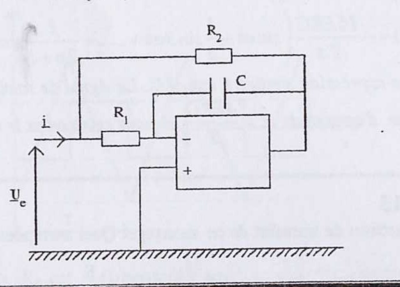
$$\underline{H}(j\omega) = -\frac{1-jRC\omega}{1+jRC\omega}$$

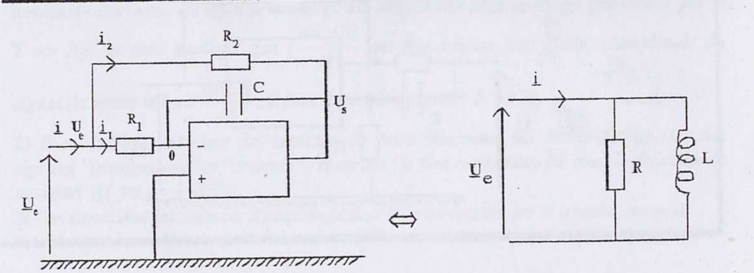
Nous avons alors $G(\omega) = 1$ et $\varphi(\omega) = \pi - 2\tan^{-1}(RC\omega)$. Le montage déphase donc le signal d'entrée tout en gardant son amplitude.

> On peut donc l'appeler montage "déphaseur"

Exercice 14

Montrer que le montage suivant se comporte comme un dipôle R, L en dérivation. Exprimer R et L en fonction de R_1, R_2 et C.





Calculons l'impédance d'entrée $\underline{Z} = \frac{\underline{U}_e}{\underline{i}}$ du montage utilisant l'AO. Pour cela, calculons $\underline{i}$. Nous avons $\underline{i} = \underline{i}_1 + \underline{i}_2$ avec $\underline{i}_1 = \frac{\underline{U}_e}{R_1}$ et $\underline{i}_2 = \frac{\underline{U}_e - \underline{U}_s}{R_2}$ d'où :

$$\underline{i} = \left(\frac{1}{R_1}+\frac{1}{R_2}\right)\underline{U}_e - \frac{1}{R_2}\underline{U}_s.$$

Exprimons maintenant $\underline{U}_s$ en fonction de $\underline{U}_e$ en utilisant le théorème de Millman à la borne inverseuse :

$$0 = \frac{jC\omega \underline{U}_s + \frac{\underline{U}_e}{R_1}}{jC\omega + \frac{1}{R_1}} \Rightarrow \underline{U}_s = -\frac{1}{jR_1C\omega}\underline{U}_e$$

On en déduit l'expression suivante de $\underline{i}$: $\underline{i} = \left(\frac{1}{R_1}+\frac{1}{R_2}+\frac{1}{jR_1R_2C\omega}\right)\underline{U}_e$

d'où :

$$\frac{1}{\underline{Z}} = \frac{1}{R_1}+\frac{1}{R_2}+\frac{1}{jR_1R_2C\omega}$$

Le montage R//L a une admittance complexe $\underline{A} = \frac{1}{\underline{Z}} = \frac{1}{R} + \frac{1}{jL\omega}$. Par identification, on obtient :

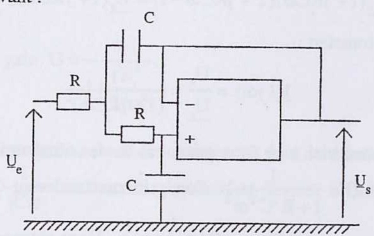
$$\boxed{R = \frac{R_1R_2}{R_1+R_2}} \quad \text{et} \quad \boxed{L = R_1R_2C}$$

Remarque

On peut vérifier rapidement l'équivalence en haute fréquence. Le montage R//L se comporte comme une simple résistance R, et le condensateur se comportant comme un fil, l'impédance d'entrée du montage AO correspond aux deux résistances R_1 et R_2 montées en parallèle.

Exercice 15

Soit le montage suivant :

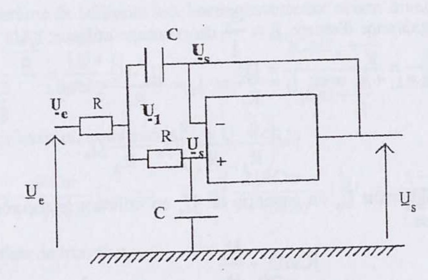


1) Montrer que ce montage correspond à un filtre passe-bas du deuxième ordre. Préciser sa pulsation de coupure.

2) Tracer l'allure de la courbe $G_{dB} = f(\text{Log}\omega)$ en précisant les asymptotes.

3) Par quelle(s) modification(s) simple(s) peut-on transformer ce filtre en passe-haut du deuxième ordre ?

1)



Repérons tous les potentiels aux différents noeuds du réseau : $\underline{U}_e$, $\underline{U}_1$, $\underline{U}_+ = \underline{U}_- = \underline{U}_s$. Stratégiquement, on peut voir que $\underline{U}_1$ et $\underline{U}_s$ sont reliés par un diviseur de tension, tandis que $\underline{U}_1$, $\underline{U}_e$ et $\underline{U}_s$ peuvent être reliés en appliquant le théorème de Millman. En exploitant les deux relations, on obtiendra l'équation liant $\underline{U}_e$ à $\underline{U}_s$ et donc la fonction de transfert.

Diviseur de tension liant $\underline{U}_1$ à $\underline{U}_s$:

$$\underline{U}_s = \frac{\frac{1}{jC\omega}}{R + \frac{1}{jC\omega}}\underline{U}_1 \Rightarrow \underline{U}_1 = (1 + jRC\omega)\underline{U}_s \quad (1)$$

Millman au point de potentiel U_1 :

$$\underline{U}_1 = \frac{\frac{\underline{U}_e}{R} + \left(jC\omega + \frac{1}{R}\right)\underline{U}_s}{jC\omega + \frac{2}{R}} \Rightarrow \underline{U}_1 = \frac{\underline{U}_e + (1 + jRC\omega)\underline{U}_s}{2 + jRC\omega} \quad (2)$$

En combinant les relations 1 et 2, on obtient :

$$\underline{U}_s(1 + jRC\omega)(2 + jRC\omega - 1) = \underline{U}_s(1 + jRC\omega)^2 = \underline{U}_e$$

D'où la fonction de transfert :

$$\underline{H}(j\omega) = \frac{\underline{U}_s}{\underline{U}_e} = \frac{1}{(1 + jRC\omega)^2}$$

Le montage correspond bien à un filtre passe-bas du deuxième ordre.

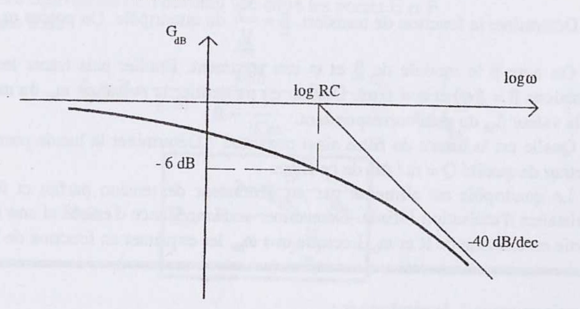
le gain du filtre est $G = \frac{1}{1 + R^2C^2\omega^2}$. Son gain maximal vaut G_{max}=1 ($\omega = 0$) et sa pulsation de coupure ω_c sera telle que $G(\omega_c) = \frac{1}{\sqrt{2}}$. Nous obtenons donc :

$$1 + R^2C^2\omega_c^{\,2} = \sqrt{2} \Rightarrow \boxed{\omega_c = \frac{0{,}64}{RC}}$$

2) $G = \frac{1}{1 + R^2C^2\omega^2}$

$\omega \to 0$	$G = 1$	$G_{dB} = 0$
$\omega \to \infty$	$G \approx \frac{1}{R^2C^2\omega^2}$	$G_{dB} = -40\log RC - 40\log\omega$
$\omega = \frac{1}{RC}$	$G = \frac{1}{2}$	$G_{dB} = -6\text{ dB}$

D'où l'allure de la courbe $G_{dB}(\text{Log}\omega)$:



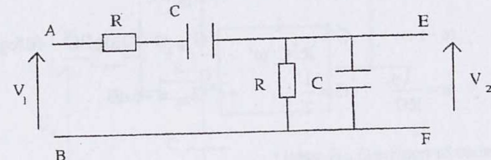
3) Nous avons dans ce montage $G = \frac{1}{1 + A^2\omega^2}$. Pour transformer ce montage en passe-haut, il suffirait de modifier celui-ci pour obtenir un gain de la forme $G = \frac{1}{1 + \frac{A'^2}{\omega^2}}$.

Il y a deux méthodes simples pour obtenir un tel gain :

a) On change les condensateurs C par des inductances L de résistances négligeables. Nous aurons alors $\frac{1}{jC\omega} \to jL\omega$ et la fonction de transfert sera $H(j\omega) = \frac{1}{(1 + \frac{R}{jL\omega})^2}$ correspondant à un gain $G = \frac{1}{1 + \frac{R^2}{L^2\omega^2}}$.

b) On permute les condensateurs et les résistances dans le montage. Nous aurons alors $\frac{1}{jC\omega} \to R$ et $R \to \frac{1}{jC\omega}$ et la fonction de transfert devient $H(j\omega) = \frac{1}{\left(1 + \frac{1}{jRC\omega}\right)^2}$ pour un gain $G = \frac{1}{1 + \frac{1}{R^2C^2\omega^2}}$.

Exercice 16 Centrale



1) Déterminer la fonction de transfert $\underline{\beta} = \dfrac{\underline{V_2}}{\underline{V_1}}$ du quadripôle. On posera $\omega_0 = \dfrac{1}{RC}$.

2) On note β le module de $\underline{\beta}$ et φ son argument. Etudier puis tracer les graphes des fonctions $\beta = f(\omega)$ et $\varphi = g(\omega)$. Donner en particulier la pulsation ω_M du maximum de β et la valeur β_M du gain correspondant.

3) Quelle est la nature du filtre ainsi constitué ? Déterminer la bande passante $\Delta\omega$ et le facteur de qualité $Q = \omega / \Delta\omega$ de ce filtre.

4) Le quadripôle est alimenté par un générateur de tension parfait et fermé sur une résistance d'utilisation infinie. Déterminer son impédance d'entrée et son impédance de sortie en fonction de R et ω_0. Lorsque $\omega = \omega_M$, les exprimer en fonction de R seulement.

1) voir exercice 7, le résultat est :

$$\underline{\beta} = \frac{\frac{1}{3}}{1+\frac{1}{3}j(\frac{\omega}{\omega_0}-\frac{\omega_0}{\omega})}$$

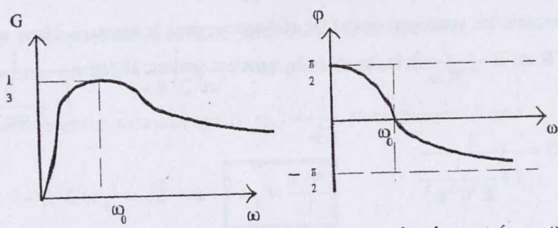
2) L'expression précédente donne :

$$\beta = \frac{\frac{1}{3}}{\sqrt{1+\frac{1}{9}(\frac{\omega}{\omega_0}-\frac{\omega_0}{\omega})^2}} \quad \text{et} \quad \varphi = \tan^{-1}\left(\frac{1}{3}\left(\frac{\omega_0}{\omega}-\frac{\omega}{\omega_0}\right)\right)$$

-- β est nul pour $\omega \to 0$ et $\omega \to \infty$ et est maximum pour $\omega_M = \omega_0$ avec $\beta(\omega_0) = \beta_M = 1/3$.

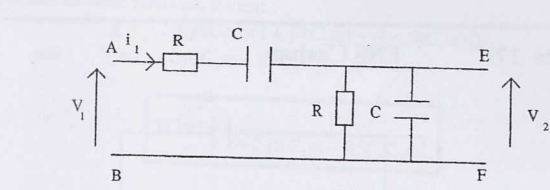
-- φ bascule de $\frac{\pi}{2}$ pour $\omega \to 0$ à $-\frac{\pi}{2}$ pour $\omega \to \infty$. D'autre part $\varphi(\omega_0) = 0$.

On en déduit l'allure des courbes :



3) L'expression de β montre que le filtre est un passe-bande centré sur ω_0, de gain maximal 1/3 et de facteur de qualité 1/3. Sa bande passante vaut $3\omega_0$.

4)



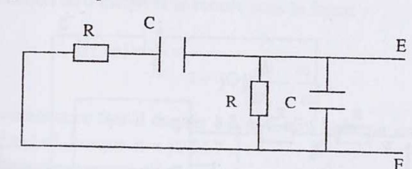
L'impédance d'entrée est définie par $\underline{Z_e} = \dfrac{\underline{V_1}}{\underline{i_1}}$. L'impédance de sortie $\underline{Z_s}$ correspond à l'impédance équivalente de Thévenin vue entre les points E et F.

Nous avons donc :

$$\underline{Z_e} = R + \frac{1}{jC\omega} + \frac{\frac{R}{jC\omega}}{R+\frac{1}{jC\omega}} = R\left(1 - j\frac{\omega_0}{\omega} + \frac{1}{1+j\frac{\omega}{\omega_0}}\right)$$

D'où : $$\underline{Z_e} = R\frac{3+j(\frac{\omega}{\omega_0}-\frac{\omega_0}{\omega})}{1+j\frac{\omega}{\omega_0}}$$

Pour la sortie, l'impédance équivalente est :



D'où :

$$\frac{1}{\underline{Z_s}} = jC\omega + \frac{1}{R} + \frac{1}{R+\frac{1}{jC\omega}} = \frac{1}{R}\left(1+j\frac{\omega}{\omega_0} + \frac{1}{1-j\frac{\omega_0}{\omega}}\right) = \frac{1}{R}\frac{3+j(\frac{\omega}{\omega_0}-\frac{\omega_0}{\omega})}{1-j\frac{\omega_0}{\omega}}$$

$$\underline{Z_s} = R\frac{1-j\frac{\omega_0}{\omega}}{3+j(\frac{\omega}{\omega_0}-\frac{\omega_0}{\omega})}$$

Pour $\omega = \omega_M = \omega_0$, nous obtenons :

$$\underline{Z_e} = \frac{3}{1+j}R \qquad \underline{Z_s} = \frac{1-j}{3}R$$

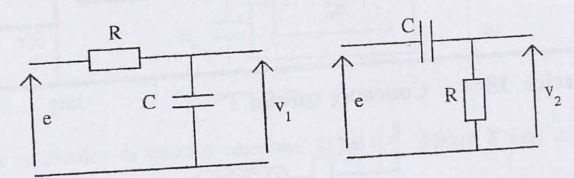
Problème n°16

d'après Ecole de l'Air

Connaissances requises : notation complexe ; expression de la loi des nœuds en termes de potentiels ; fonction de transfert ; diagramme de Bode.

A - Etude de filtres passe-bas et passe-haut.

On réalise les deux circuits suivants avec R = 50 kΩ et C = 3,2 nF :



e(t) est une tension sinusoïdale de fréquence f.

A.1) Ecrire les fonctions de transfert des deux montages :

$$H_1(j\omega) = \frac{\underline{v_1}}{\underline{e}} \quad \text{et} \quad H_2(j\omega) = \frac{\underline{v_2}}{\underline{e}}.$$

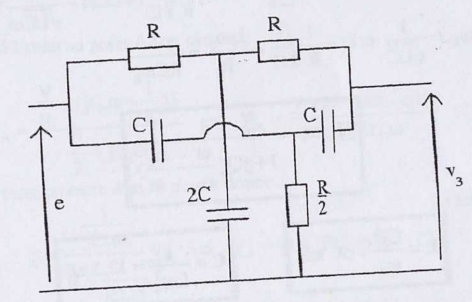
A.2) Etudier le comportement de ces deux circuits en BF et en HF.

A.3) Tracer les diagrammes G(ω) pour ces deux circuits. On précisera pour chacun d'eux la nature du filtre et la pulsation de coupure à 3 dB. On calculera numériquement la fréquence de coupure.

A.4) La tension e(t) a une fréquence f = 1000 Hz et une amplitude de 2 V. Donner les caractéristiques des signaux de sortie dans chacun des deux montages.

B - Etude d'un filtre coupe bande.

B.1) On réalise maintenant le circuit suivant, R et C gardent toujours les mêmes valeurs.



On donne pour ce circuit la fonction de transfert : $H_3(j\omega) = \frac{\underline{v_3}}{\underline{e}} = \frac{1}{1 + \frac{4jRC\omega}{1 - R^2C^2\omega^2}}$

Etudier le comportement du circuit en HF et en BF, retrouver le comportement à partir de la fonction de transfert.

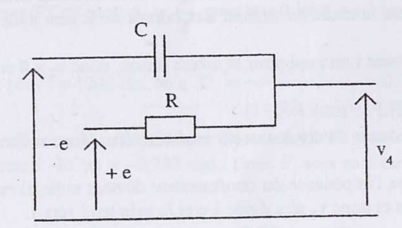
B.2) Justifier le nom de filtre à réjection ou filtre coupe bande. Donner alors les pulsations de coupure de ce filtre.

B.3) Tracer le diagramme G(ω).

B.4) Donner le signal en sortie quand on applique à l'entrée de ce filtre e(t), signal sinusoïdal de fréquence f = 1000 Hz et d'amplitude 2 V.

C - Filtre passe-tout.

C.1) On réalise le circuit suivant :



Quelle est la fonction de transfert $H_4(j\omega) = \frac{\underline{v_4}}{\underline{e}}$ de ce circuit ?

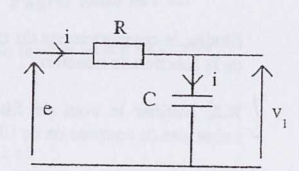
C.2) Etudier le comportement du circuit en BF et en HF.

C.3) Tracer le diagramme G(ω) de ce circuit.

C.4) On applique à l'entrée la tension e(t) précédente, donner les caractéristiques du signal de sortie.

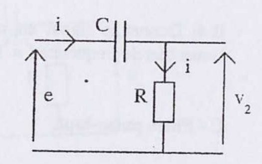
Corrigé

A.1) montage a :



$$H_1(j\omega)=\frac{\underline{v_1}}{\underline{e}}=\frac{\frac{1}{jC\omega}\underline{I}}{R\underline{I}+\frac{\underline{I}}{jC\omega}}=\frac{1}{1+jRC\omega}$$

montage b :



$$H_2(j\omega)=\frac{\underline{v_2}}{\underline{e}}=\frac{R\underline{I}}{R\underline{I}+\frac{\underline{I}}{jC\omega}}=\frac{jRC\omega}{1+jRC\omega}$$

A.2) Comportement en B.F. : $\omega \to 0$

montage a : l'impédance du condensateur tend vers l'infini et le courant devient nul ; on aura donc $v_1 = e$ car la chute de tension aux bornes de R sera nulle ; le gain sera donc égal à 1.

montage b : le courant i sera nul pour la même raison, donc $v_2 = 0$ et le gain sera nul.

Comportement en H.F. : $\omega \to \infty$

montage a : l'impédance du condensateur tend vers zéro, donc v_1 devient nulle ainsi que le gain.

montage b : comme l'impédance du condensateur devient nulle, il en est de même de la tension à ses bornes et donc v_2 sera égale à e et le gain tend vers 1.

Le montage a est donc un filtre passe-bas et le montage b un filtre passe-haut.

A.3) Tracé des courbes du gain.

Montage a : le gain correspond au module de $H_1(j\omega)$; donc $\boxed{G_1=\frac{1}{(1+R^2C^2\omega^2)^{\frac{1}{2}}}}$

Pour $\omega = 0 \Rightarrow G_1 = 1$; pour $\omega \to \infty \Rightarrow G_1 \to 0$. On vérifie que $\frac{dG_1}{d\omega} = 0$ en $\omega = 0$.

La pulsation de coupure à 3 dB est donnée par $G_1(\omega_C)=\frac{1}{\sqrt{2}}$; il faut donc résoudre l'équation $\frac{1}{(1+R^2C^2\omega_C^2)^{\frac{1}{2}}}=\frac{1}{\sqrt{2}}$.

d'où $\omega_C = \frac{1}{RC} = 6250\ \text{rad.s}^{-1}$ et $f_C = 995$ Hz.

Montage b : on a de même : $\boxed{G_2=\frac{RC\omega}{(1+R^2C^2\omega^2)^{\frac{1}{2}}}}$

Pour $\omega = 0$ on a $G_2 = 0$; pour $\omega \to \infty \Rightarrow G_2 \to 1$. On vérifie que $\frac{dG_2}{d\omega} = RC$ en $\omega = 0$.

Pour trouver la pulsation de coupure, il faut résoudre : $G_2=\frac{RC\omega_C}{(1+R^2C^2\omega_C^2)^{\frac{1}{2}}}=\frac{1}{\sqrt{2}}$.

On trouve de même : $\omega_C = \frac{1}{RC} = 6250\ \text{rad.s}^{-1}$ et $f_C = 995$ Hz.

Tracé des courbes du déphasage.

Montage a : le déphasage φ_1 de v_1 par rapport à e correspond à l'argument de $H_1(j\omega)$. On a donc $\tan(\varphi_1) = -RC\omega$; soit $\varphi_1 = 0$ pour $\omega = 0$ et $\varphi_1 = -\frac{\pi}{2}$ pour $\omega \to \infty$.

Montage b : le déphasage φ_2 de v_2 par rapport à e correspond à l'argument de $H_2(j\omega)$. On a

donc $\varphi_2 = \frac{\pi}{2} - \arctan(RC\omega)$; soit $\varphi_2 = \frac{\pi}{2}$ pour $\omega = 0$ et $\varphi_2 \to 0$ pour $\omega \to \infty$.

A.4) Montage a : pour f = 1000 Hz, on a $G_1=\frac{1}{(1+R^2C^2\omega^2)^{\frac{1}{2}}}=0{,}71$; donc l'amplitude de v_1 sera égale à celle de e(t) multipliée par G_1 soit 1,42 V.

Et on aura $\varphi_1 = \arctan(-RC\omega) = -0{,}788$ rad.. Donc v_1 sera en retard de $-0{,}788$ rad. sur e(t).

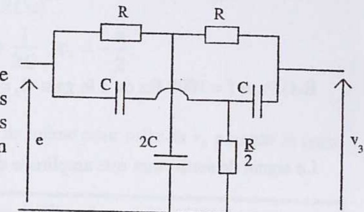
Montage b : pour f = 1000 Hz, on a $G_2=\frac{RC\omega}{(1+R^2C^2\omega^2)^{\frac{1}{2}}}=0{,}71$

et $\varphi_2 = \frac{\pi}{2} - \arctan(RC\omega)$ soit $\varphi_2 = 0{,}78$ rad.

Donc v_2 a une amplitude de 0,71.2 = 1,42 V et est en avance sur e(t) de 0,78 rad.

B.1)

Comportement en B.F. : les condensateurs se comportent alors comme des résistances infinies ; aucun courant ne passe dans les résistances R et donc v_3 sera égal à e et le gain sera égal à l'unité.



Cela se vérifie dans la fonction de transfert proposée ; si $\omega \to 0$, on voit que $H_3 \to 1$.

Comportement en H.F. : les condensateurs se comportent alors comme des court-circuits et on aura encore $v_3 = e$ et le gain sera encore égal à l'unité.

Si $\omega \to \infty$, la fonction H_3 sera équivalente à $\dfrac{1}{1+\dfrac{4\,jRC\omega}{-R^2C^2\omega^2}} = \dfrac{1}{1+\dfrac{4j}{-RC\omega}} \to 1$. Et le module sera bien égal à 1.

B.2) On voit facilement que si $RC\omega = 1$ soit $\omega = \dfrac{1}{RC}$, alors H_3 sera nulle. Le filtre coupe donc une bande de pulsation autour de $\omega = \dfrac{1}{RC}$; c'est un filtre réjecteur.

Les pulsations de coupure sont données par : $|H_3(j\omega_C)| = \dfrac{1}{\sqrt{2}}$.

Il faut donc résoudre l'équation : $\dfrac{|1-R^2C^2\omega^2|}{((1-R^2C^2\omega^2)^2+16R^2C^2\omega^2)^{\frac{1}{2}}} = \dfrac{1}{\sqrt{2}}$;

en posant $x = RC\omega$ et en élevant au carré : $(1-x^2)^2 = 16x^2$ soit $1-x^2 = \pm 4x$

On en tire deux solutions positives : $x_1 = 4{,}24$ et $x_2 = 0{,}236$ et comme $x = RC\omega$ on en déduit :

$$\boxed{\omega_{C1} = 26500\,\text{rad.s}^{-1} \quad \text{et} \quad \omega_{C2} = 1475\,\text{rad.s}^{-1}}$$

B.3) Le gain correspond au module de H_3 ; soit $G_3 = \dfrac{|1-R^2C^2\omega^2|}{((1-R^2C^2\omega^2)^2+16R^2C^2\omega^2)^{\frac{1}{2}}}$.

On a vu que $G_3 \to 1$ si $\omega \to 0$ et si $\omega \to \infty$ et $G_3 \to 0$ si $\omega = \dfrac{1}{RC} = 6250\,\text{rad.s}^{-1}$

La phase φ_3 de v_3 est l'argument de $H_3(j\omega)$; soit $\varphi_3 = -\arctan\left(\dfrac{4RC\omega}{1-R^2C^2\omega^2}\right)$.

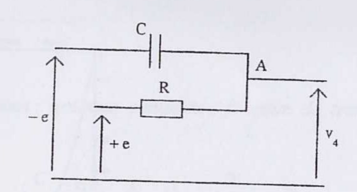
Si $\omega \to 0$, $\varphi_3 \to 0$; si $\omega \to \infty$, $\varphi_3 \to -\pi$; si $\omega = \dfrac{1}{RC}$, $\varphi_3 = -\dfrac{\pi}{2}$.

B.4) Pour $f = 1000$ Hz on a le gain $G_3 = \dfrac{|1-R^2C^2\omega^2|}{((1-R^2C^2\omega^2)^2+16R^2C^2\omega^2)^{\frac{1}{2}}} = 2{,}6.10^{-3}$.

Le signal de sortie aura une amplitude de $2{,}6.10^{-3} \cdot 2 = 5{,}2.10^{-3}$ V ; il est donc atténué.

La phase sera donnée par : $\varphi_3 = -\arctan\left(\dfrac{4RC\omega}{1-R^2C^2\omega^2}\right) = 1{,}568$ rad.

C.1)



Avec le théorème de Millmann en A (loi des nœuds en termes de potentiels) :

$$\underline{v_4} = \frac{\dfrac{\underline{e}}{R} + \dfrac{-\underline{e}}{\frac{1}{jC\omega}}}{\dfrac{1}{R} + jC\omega} \quad \text{d'où} \quad \underline{v_4} = \underline{e}\,\frac{1-jRC\omega}{1+jRC\omega}$$

et donc

$$\boxed{\underline{H_4} = \frac{1-jRC\omega}{1+jRC\omega}}$$

C.2) Comportement en BF :

Le condensateur se comporte comme une résistance infinie ; donc aucun courant ne circule dans la maille ; on a $\boxed{\underline{v_4} = \underline{e}}$

Comportement en HF :

le condensateur se comporte comme un court-circuit ; et $\boxed{\underline{v_4} = -\underline{e}}$

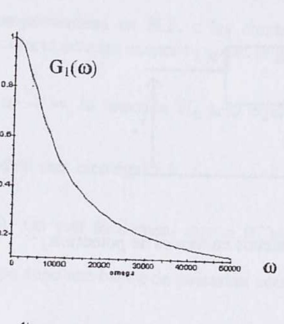
C.3) Etude du gain : $G_4 = |\underline{H_4}| = \left|\dfrac{\underline{v_4}}{\underline{e}}\right| = 1$; on voit que le gain est constant et égal à l'unité quelle que soit la pulsation ; c'est bien un filtre passe-tout.

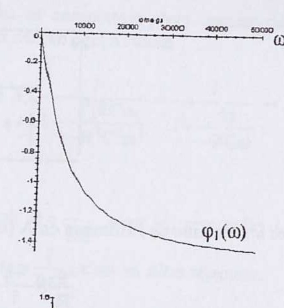
Etude de la phase : $\varphi_4 = \arg(\underline{H_4}) = -2\arctan(RC\omega)$.

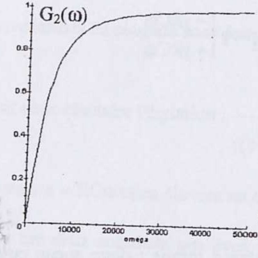
Si $\omega = 0$, $\varphi_4 = 0$; si $\omega \to \infty$, $\varphi_4 \to -\pi$; si $\omega = \dfrac{1}{RC}$, $\varphi_4 = -\dfrac{\pi}{2}$.

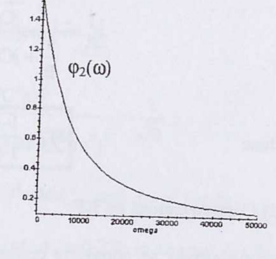
C.4) Si l'amplitude de e(t) vaut 2 V, il en sera de même pour celle de v_4 puisque le gain vaut 1.

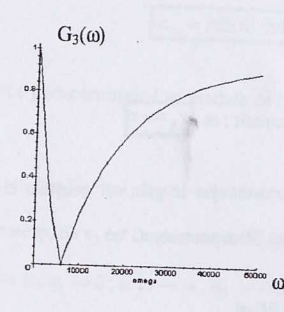
$$\boxed{\text{On aura } \varphi_4 = \arg(\underline{H_4}) = -2\arctan(RC\omega) = -1{,}576 \text{ rad. pour } f = 1000 \text{ Hz.}}$$

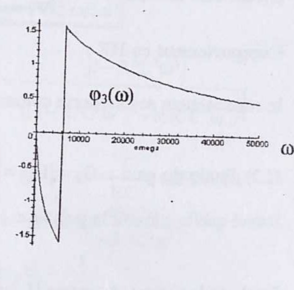


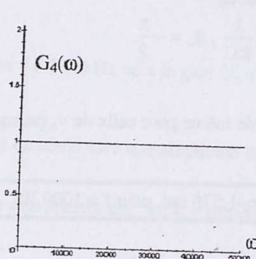


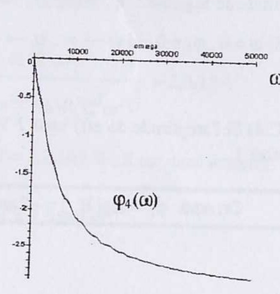


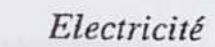








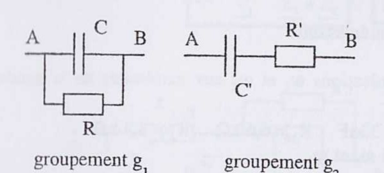




Problème n°17

d'après ENSAIT

Connaissances requises : notation complexe ; fonction de transfert ; diagramme de Bode.

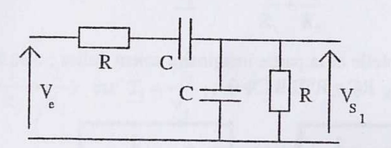


1) On considère les deux groupements g_1 et g_2 ci-dessus pris séparément alimentés en courant sinusoïdal à la pulsation ω.

1.1) Déterminer C' et R' pour que les deux groupements soient équivalents entre A et B.

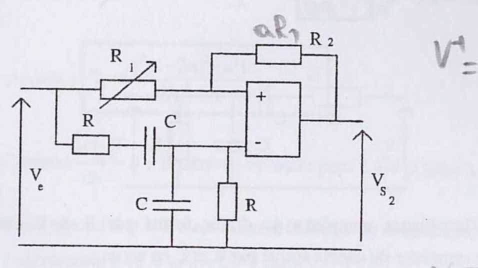
1.2) Pour quelle valeur de ω a-t-on RC = R'C'. Exprimer ω en fonction de R et C.

2) On associe les deux groupements g_1 et g_2 pour obtenir le montage suivant alimenté par une tension alternative sinusoïdale de pulsation ω avec R' = R et C' = C. On note $\underline{V_e}$ et $\underline{V_{S1}}$ les amplitudes complexes associées aux tensions d'entrée et de sortie.



2.1) Calculer la fonction de transfert complexe $\underline{T_1} = \dfrac{\underline{V_{S_1}}}{\underline{V_e}}$ en fonction de x = RCω.

2.2) On étudie le montage suivant utilisant un amplificateur opérationnel parfait. On prend $R_2 = aR_1$.



$V^+ = \dfrac{\frac{V_{s2}}{R_2} + \frac{V_e}{R_1}}{\frac{1}{R_2} + \frac{1}{R_1}}$

$V^- =$

2.2.1) Calculer la fonction de transfert complexe $\underline{T_2} = \frac{\underline{V_{S_2}}}{\underline{V_e}} = f(a,x)$.

2.2.2) Pour quelle pulsation ω_0, $T_2 = |\underline{T_2}|$ est-il minimal ?

2.2.3) Tracer la courbe représentant $20\log(T_2)$ en fonction de $\log(\omega)$ pour les valeurs numériques ci-dessous.
Etudier alors les points intéressants.

2.2.4) Déterminer les pulsations ω_1 et ω_2 aux extrémités de la bande non passante à 3dB.
AN: $R = 4{,}7\ k\Omega$ $C = 33nF$ $R_1 = 6{,}6\ k\Omega$ $R_2 = 3{,}3\ k\Omega$.
Calculer numériquement ω_1 et ω_2.

Corrigé

1.1) Les deux dipôles doivent avoir la même impédance.

$$\frac{R\frac{1}{jC\omega}}{R+\frac{1}{jC\omega}} = R' + \frac{1}{jC'\omega} \quad \text{d'où} \quad 0 = 1 - R'C'RC\omega^2 + j\omega(RC + R'C' - RC')$$

Il faut que la partie réelle et la partie imaginaire soient nulles ; d'où le système suivant :
$1 = R'C'RC\omega^2$ et $RC + R'C' - RC' = 0$;

on en tire que $\boxed{C' = C + \frac{1}{R^2C\omega^2}}$ et $\boxed{R' = R\frac{1}{1+R^2C^2\omega^2}}$

1.2) On a $RC = R'C'$ si $\boxed{\omega = \frac{1}{RC}}$

2.1)

Soient $\underline{Z_1}$ l'impédance complexe du dipôle formé par R et C en parallèle et $\underline{Z_2}$ l'impédance complexe du dipôle formé par R et C en série.

$$\underline{Z_1} = \frac{R\frac{1}{jC\omega}}{R+\frac{1}{jC\omega}} = \frac{R}{1+jx} \quad \text{et} \quad \underline{Z_2} = R + \frac{1}{jC\omega} = \frac{1+jx}{jC\omega} \quad \text{en posant } x = RC\omega.$$

On a d'après le diviseur de tension : $\boxed{\underline{T_1} = \frac{\underline{V_{S_1}}}{\underline{V_e}} = \frac{\underline{Z_1}}{\underline{Z_1}+\underline{Z_2}}} = \boxed{\frac{jx}{1-x^2+3jx}}$

2.2.1)

En appliquant le théorème de Millmann aux tensions complexes, c'est-à-dire la loi des nœuds en termes de potentiels à l'entrée non inverseuse :

$$\underline{V_+} = \frac{\frac{\underline{V_e}}{R_1}+\frac{\underline{V_{S_2}}}{R_2}}{\frac{1}{R_1}+\frac{1}{R_2}} = \underline{V_-} = \underline{T_1}\,\underline{V_e} \quad \text{car } \underline{T_1} = \frac{\underline{V_-}}{\underline{V_e}} \quad \text{d'où} \quad \frac{\frac{\underline{V_e}}{R_1}+\frac{\underline{V_{S_2}}}{R_2}}{\frac{1}{R_1}+\frac{1}{R_2}} = \underline{T_1}\,\underline{V_e}$$

et $\frac{1}{R_1} + \frac{\underline{T_2}}{R_2} = \underline{T_1}(\frac{1}{R_1}+\frac{1}{R_2})$ car $\underline{T_2} = \frac{\underline{V_{S_2}}}{\underline{V_e}}$; or $R_2 = aR_1$ d'où $a + \underline{T_2} = \underline{T_1}(1+a)$

et en remplaçant $\underline{T_1}$ par son expression : $\boxed{\underline{T_2} = \frac{jx(1+a)}{1-x^2+3jx} - a}$

2.2.2) Réduisons au même dénominateur : $\underline{T_2} = \frac{a(x^2-1)+jx(1-2a)}{1-x^2+3jx}$

On en déduit le module : $\boxed{T_2 = \left(\frac{x^2(1-2a)^2+a^2(x^2-1)^2}{9x^2+(1-x^2)^2}\right)^{\frac{1}{2}}}$

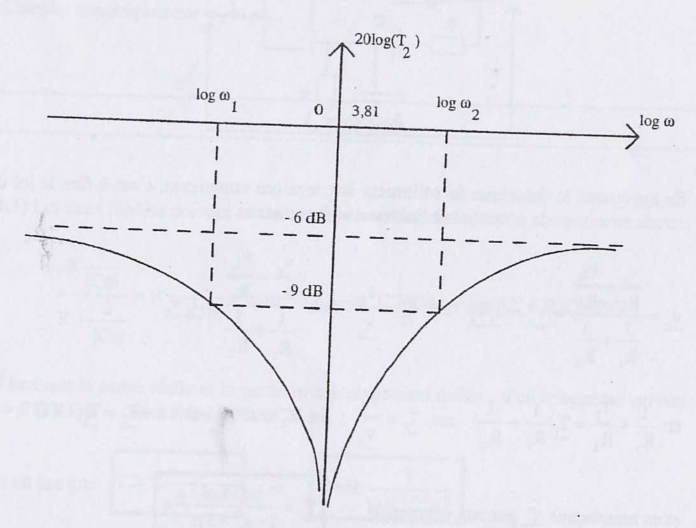
T_2 est minimum lorsque $\frac{dT_2}{dx} = 0$; la dérivée est nulle pour x = 0 et pour x = 1.

La solution x = 0 correspond à $\omega = 0$, c'est-à-dire à la limite du courant continu.
La solution x = 1 correspond à $\omega_0 = \frac{1}{RC} = 6447\ rad.s^{-1}$.

2.2.3)

x	ω	log ω	T_2	$20\log T_2$
0	0	− l'infini	a	− 6 dB
infini	infini	+ l'infini	a	− 6 dB
1	ω_0	3,81	0	− l'infini

Courbe : il s'agit d'un filtre réjecteur qui élimine la pulsation ω_0.



2.2.4) La bande non passante est limitée par $20\log(T_2) = -9\text{dB}$ ou par $T_2 = \frac{a}{\sqrt{2}}$ puisque a est le maximum de T_2.

On doit résoudre : $\frac{a^2}{2} = \frac{x^2(1-2a)^2 + a^2(x^2-1)^2}{9x^2 + (1-x^2)^2}$ avec $a = \frac{1}{2}$.

On obtient l'équation : $0 = x^4 - 11x^2 + 1$

dont les solutions positives sont : $x_1 = 0{,}3027$ d'où $\omega_1 = \frac{x_1}{RC} = 1951\ \text{rad.s}^{-1}$

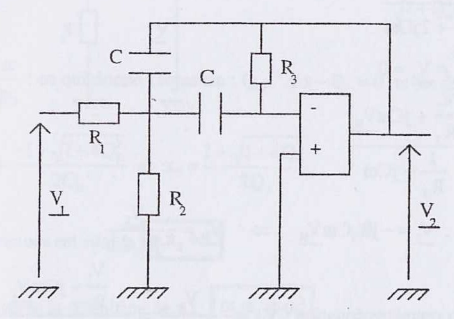
$x_2 = 3{,}302$ d'où $\omega_2 = \frac{x_2}{RC} = 21289\ \text{rad.s}^{-1}$

Problème n°18

d'après Centrale-Supelec

Connaissances requises : notation complexe ; fonction de transfert ; filtre actif à AO.

Le montage utilisé est représenté sur la figure. On l'étudie en régime sinusoïdal forcé de pulsation ω en utilisant les notations complexes. L'amplificateur opérationnel est idéal et en régime linéaire.



1) Etablir l'expression de la fonction de transfert : $\underline{H} = \frac{\underline{V_2}}{\underline{V_1}}$

2) Reconnaître, à un coefficient multiplicatif près, une fonction de transfert que l'on précisera, obtenue à partir d'un circuit R, L, C série.

3) Mettre $\underline{H}$ sous la forme réduite $\underline{H} = \frac{-H_0}{1 + jQ_0(\frac{\omega}{\omega_0} - \frac{\omega_0}{\omega})}$ où n'interviennent que la pulsation ω, la pulsation de résonance ω_0, le facteur de qualité Q_0, et le coefficient multiplicatif maximum H_0. On précisera les expressions de H_0, ω_0 et Q_0 en fonction des composants utilisés R_1, R_2, R_3 et C.

4) Rappeler l'expression de la bande passante Δω à − 3 dB du montage à partir de ω_0 et Q_0.
Quelle est la relation simple liant les pulsations de coupure ω_1 et ω_2 à ω_0 ?

5) Les résistances R_1, R_2, R_3 sont en fait des potentiomètres dont on peut choisir continûment la valeur entre 0 et 100 kΩ. Montrer qu'alors les caractéristiques du filtre peuvent être choisies indépendamment les unes des autres. On veut obtenir une bande passante comprise entre les fréquences 300 Hz et 3400 Hz.
Déterminer les valeurs numériques de ω_0, Δω et Q_0.
Calculer le coefficient H_0, sachant que $R_1 = 4R_3$.
Calculer R_1, R_2, R_3 pour C = 100 nF.

Corrigé

1)

Appliquons la loi des nœuds en termes de potentiels, au noeud N et au noeud M, en utilisant les amplitudes complexes :

$$\underline{V_N} = \frac{\frac{\underline{V_1}}{R_1} + jC\omega\underline{V_2}}{\frac{1}{R_1}+\frac{1}{R_2}+2jC\omega}$$

car $\underline{V_M} = \underline{V_-} = \underline{V_+} = 0$

et $\underline{V_M} = 0 = \dfrac{\frac{\underline{V_2}}{R_3} + jC\omega\underline{V_N}}{\frac{1}{R_3}+jC\omega}$

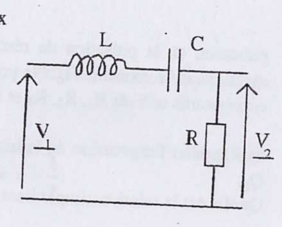
On en déduit : $\underline{V_2} = -jR_3C\omega\underline{V_N} \quad \Rightarrow \quad \underline{V_N} = -\dfrac{\underline{V_2}}{jR_3C\omega}$

En reprenant la première équation : $\underline{V_N} = -\dfrac{\underline{V_2}}{jR_3C\omega} = \dfrac{\frac{\underline{V_1}}{R_1} + jC\omega\underline{V_2}}{\frac{1}{R_1}+\frac{1}{R_2}+2jC\omega}$

On en déduit :

$$\boxed{\underline{H} = \frac{\underline{V_2}}{\underline{V_1}} = \frac{\frac{-R_3}{2R_1}}{1+j\frac{R_3}{2}C\omega - \frac{j}{2C\omega}(\frac{1}{R_1}+\frac{1}{R_2})}} \quad (1)$$

2) Pour un circuit R, L, C série, avec sortie aux bornes de R, on a la fonction complexe de transfert : $\underline{H} = \dfrac{\underline{V_2}}{\underline{V_1}} = \dfrac{1}{1+j\frac{L\omega}{R} - \frac{j}{RC\omega}}$.



On retrouve donc bien la même forme au coefficient $\dfrac{-R_3}{2R_1}$ près.

3) En identifiant (1) avec la forme proposée dans l'énoncé, on a $\boxed{H_0 = \dfrac{R_3}{2R_1}}$

$$\frac{Q_0}{\omega_0} = \frac{R_3C}{2} \quad \text{et} \quad Q_0\omega_0 = \frac{1}{2C}(\frac{1}{R_1}+\frac{1}{R_2})$$

on en déduit : $\boxed{\omega_0^2 = (\frac{1}{R_1}+\frac{1}{R_2})\frac{1}{R_3C^2}}$ et $\boxed{Q_0^2 = \frac{R_3}{4}(\frac{1}{R_1}+\frac{1}{R_2})}$

4) La bande passante à –3 dB est donnée par : $\boxed{\Delta\omega = \dfrac{\omega_0}{Q_0}}$

Pour trouver les pulsations de coupure, on doit résoudre : $|\underline{H}| = \dfrac{H_0}{\sqrt{1+Q_0^2(x-\frac{1}{x})^2}} = \dfrac{H_0}{\sqrt{2}}$

en posant $x = \dfrac{\omega}{\omega_0}$; ce qui donne l'équation : $Q_0x^2 \pm x - Q_0 = 0$ et les deux solutions

s'écrivent : $x_1 = \dfrac{-1+\sqrt{1+4Q_0^2}}{2Q_0}$ et $x_2 = \dfrac{1+\sqrt{1+4Q_0^2}}{2Q_0}$

le produit des racines est égal à $\boxed{x_1x_2 = 1}$

on en déduit, d'après la définition de x : $\boxed{\omega_1\omega_2 = \omega_0^2}$

5) La bande passante est : $\Delta\omega = \dfrac{\omega_0}{Q_0} = \dfrac{2}{R_3C}$; le choix de R_3 permet donc de fixer $\Delta\omega$.

On a $H_0 = \dfrac{R_3}{2R_1}$; en choisissant ensuite R_1, on fixe donc H_0.

Et $\omega_0^2 = (\dfrac{1}{R_1}+\dfrac{1}{R_2})\dfrac{1}{R_3C^2}$; en terminant avec le choix de R_2, on fixe donc ω_0.

A.N. : $\omega_1 = 2\pi 300\ \text{rad.s}^{-1}$; $\omega_2 = 2\pi 3400\ \text{rad.s}^{-1}$; $\boxed{\omega_0 = \sqrt{\omega_1\omega_2} = 6346\ \text{rad.s}^{-1}}$

$\boxed{\Delta\omega = \omega_2 - \omega_1 = 19478\ \text{rad.s}^{-1}}$; $\boxed{Q_0 = \dfrac{\omega_0}{\Delta\omega} = 0{,}325}$; $\boxed{H_0 = \dfrac{R_3}{2R_1} = \dfrac{R_3}{8R_3} = 0{,}125}$

$\dfrac{\omega_0}{Q_0} = \dfrac{2}{R_3C}$; on en tire $\boxed{R_3 = 1024\ \Omega}$; $\boxed{R_1 = 4R_3 = 4097\ \Omega}$

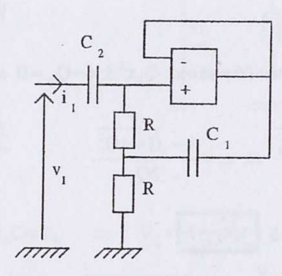
$Q_0^2 = \dfrac{R_3}{4}(\dfrac{1}{R_1}+\dfrac{1}{R_2})$; on en tire $\boxed{R_2 = 5939\ \Omega}$

Problème n°19

d'après ENSIL

Connaissances requises : notation complexe ; loi des nœuds en term s de potentiels ; fonction de transfert ; filtre actif à AO.

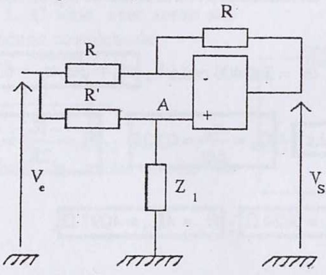
1) Le dipôle représenté sur la figure utilise un amplificateur opérationnel idéal en régime linéaire.



1.1) Calculer l'impédance d'entrée $\underline{Z_1} = \frac{\underline{V_1}}{\underline{I_1}}$. Montrer que le circuit est équivalent à un circuit série dont on déterminera les éléments R_e, L_e, C_e.

1.2) Calculer la pulsation de résonance ω_0, le facteur de qualité Q et la bande passante à 3 dB.
Application numérique : $C_1 = 100\ \mu F$; $C_2 = 100$ pF ; $R = 1$ kΩ.

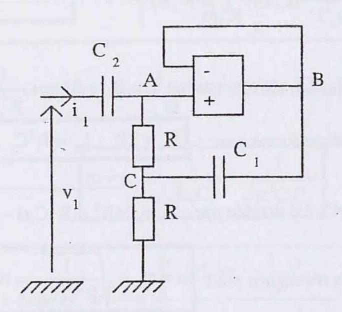
2) On considère le montage suivant où l'AO est idéal et en régime linéaire ; Z_1 représente le dipôle de la question **1)**.



2.1) Calculer le gain $G_v = \frac{V_s}{V_e}$. Pour quelle valeur de R' et de ω le gain est-il nul ?

2.2) Pour la valeur de R' précédemment fixée, représenter graphiquement le module de G_v en fonction de la pulsation ω. Calculer les pulsations ω_1 et ω_2 correspondant à un affaiblissement du signal égal à 3 dB. Donner l'expression de : $\frac{\Delta\omega}{\omega_0} = \frac{\omega_1 - \omega_2}{\omega_0}$ et du facteur de qualité $Q' = \frac{\omega_0}{\Delta\omega}$ en fonction de C_1 et C_2. Conclusion ?

Corrigé



1.1) L'AO étant en régime linéaire $V_A = V_B$. Utilisons les amplitudes complexes.

nous voyons que : $\underline{V_1} - \underline{V_A} = \frac{1}{jC_2\omega}\underline{I_1}$

pour trouver $\underline{Z_1}$ il faut donc exprimer $\underline{V_A}$.

Appliquons le théorème de Millmann en A et en C

$$\underline{V_A} = \frac{\underline{V_1} jC_2\omega + \frac{\underline{V_C}}{R}}{jC_2\omega + \frac{1}{R}} \ ; \ \underline{V_C} = \frac{\frac{\underline{V_A}}{R} + \underline{V_A} jC_1\omega}{\frac{2}{R} + jC_1\omega}$$

Dans la première équation, remplaçons $\underline{V_C}$ par son expression fournie par la seconde équation et développons :

$$\left(\frac{1}{R} + jC_2\omega\right)\underline{V_A} = jC_2\omega\underline{V_1} + \frac{1}{R}\left(\frac{\frac{1}{R} + jC_1\omega}{\frac{2}{R} + jC_1\omega}\right)\underline{V_A} \quad \text{d'où} \quad \underline{V_A} = \frac{jC_2\omega(2 + jRC_1\omega)}{\frac{1}{R} + 2jC_2\omega - RC_1C_2\omega^2}\underline{V_1}$$

Calculons $\underline{V_1} - \underline{V_A} = \underline{V_1} - \frac{jC_2\omega(2 + jRC_1\omega)}{\frac{1}{R} + 2jC_2\omega - RC_1C_2\omega^2}\underline{V_1} = \underline{V_1}\frac{\frac{1}{R}}{\frac{1}{R} + 2jC_2\omega - RC_1C_2\omega^2}$

Or $\underline{V_1}-\underline{V_A}=\frac{1}{jC_2\omega}\underline{I_1}$; on en déduit $\underline{V_1}\frac{\frac{1}{R}}{\frac{1}{R}+2jC_2\omega-RC_1C_2\omega^2}=\frac{1}{jC_2\omega}\underline{I_1}$

Et donc : $\underline{Z_1}=\frac{\underline{V_1}}{\underline{I_1}}=\frac{\frac{1}{R}+2jC_2\omega-RC_1C_2\omega^2}{\frac{1}{R}jC_2\omega}$ d'où $\boxed{\underline{Z_1}=2R+jR^2C_1\omega+\frac{1}{jC_2\omega}}$

Pour un circuit R_e, L_e, C_e série, on aurait $\underline{Z}=R_e+jL_e\omega+\frac{1}{jC_e\omega}$; on obtient donc bien une impédance de même forme avec : $\boxed{R_e=2R\ ;\ L_e=R^2C_1\ ;\ C_e=C_2}$

1.2) L'impédance réelle est donnée par : $Z_1=\sqrt{4R^2+(R^2C_1\omega-\frac{1}{C_2\omega})^2}$

Elle est minimale à la résonance pour $\boxed{\omega=\omega_0=\sqrt{\frac{1}{R^2C_1C_2}}=10^4\ \text{rad.s}^{-1}}$

Le facteur de qualité Q est : $\boxed{Q=\frac{L_e\omega_0}{R_e}=\frac{R^2C_1}{2R}\frac{1}{R\sqrt{C_1C_2}}=\frac{1}{2}\sqrt{\frac{C_1}{C_2}}=500}$

La bande passante à 3 dB : $\boxed{\Delta\omega=\frac{\omega_0}{Q}=\frac{\frac{1}{R\sqrt{C_1C_2}}}{\frac{1}{2}\sqrt{\frac{C_1}{C_2}}}=\frac{2}{R}\frac{1}{C_1}=20\ \text{rad.s}^{-1}}$

2.1) En utilisant les amplitudes complexes et le diviseur de tension : $\underline{V_A}=\underline{V_e}\frac{\underline{Z_1}}{\underline{Z_1}+R'}$

Et en utilisant le théorème de Millmann : $\underline{V_A}=\underline{V_-}=\frac{\frac{\underline{V_e}}{R}+\frac{\underline{V_S}}{R}}{\frac{2}{R}}$.

En identifiant les deux expressions de $\underline{V_A}$: $\frac{\underline{V_e}+\underline{V_S}}{2}=\frac{\underline{Z_1}\,\underline{V_e}}{\underline{Z_1}+R'}$ et en divisant par $\underline{V_e}$ on fait apparaître la fonction de transfert : $\boxed{\underline{H}=\frac{\underline{V_S}}{\underline{V_e}}=\frac{\underline{Z_1}-R'}{\underline{Z_1}+R'}}$.

Avec l'expression trouvée dans la question 1) :

$\underline{Z_1}=2R+jR^2C_1\omega+\frac{1}{jC_2\omega}$ que l'on a mis sous la forme : $\underline{Z_1}=R_e+jL_e\omega+\frac{1}{jC_e\omega}$.

on peut donc écrire : $\underline{H}=\frac{R_e-R'+j(L_e\omega-\frac{1}{C_e\omega})}{R_e+R'+j(L_e\omega-\frac{1}{C_e\omega})}$.

Le gain s'écrit donc : $\boxed{G_v=|\underline{H}|=\frac{V_S}{V_e}=\sqrt{\frac{(R_e-R')^2+(L_e\omega-\frac{1}{C_e\omega})^2}{(R_e+R')^2+(L_e\omega-\frac{1}{C_e\omega})^2}}}$

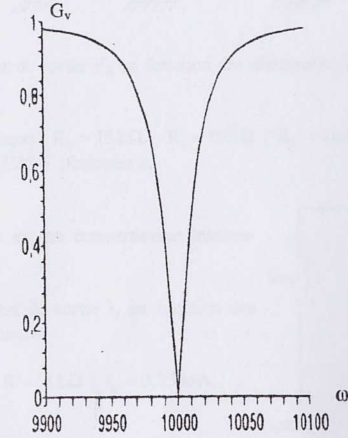
On aura $G_v=0$ pour $(R_e-R')^2+(L_e\omega-\frac{1}{C_e\omega})^2=0$; il faut donc que $\boxed{R'=R_e=2R}$

et $L_e\omega-\frac{1}{C_e\omega}=0 \Rightarrow$ $\boxed{\omega=\omega_0=\frac{1}{\sqrt{L_eC_e}}=\frac{1}{\sqrt{R^2C_1C_2}}}$

2.2) $R'=R_e=2R$. On a donc $G_v=\frac{V_S}{V_e}=\sqrt{\frac{(L_e\omega-\frac{1}{C_e\omega})^2}{16R^2+(L_e\omega-\frac{1}{C_e\omega})^2}}=\frac{1}{\sqrt{1+\frac{16R^2}{(L_e\omega-\frac{1}{C_e\omega})^2}}}$

Pour $\omega\to 0$, $G_v\to 1$;
pour $\omega\to\infty$, $G_v\to 1$;
pour $\omega=\omega_0$, $G_v=0$.

D'où la courbe, qui a été tracée autour de ω_0.



Les pulsations de coupure à 3 dB sont données par :

$$G_v(\omega)) = \frac{1}{\sqrt{2}} \text{ soit } \frac{16R^2}{(L_e\omega - \frac{1}{C_e\omega})^2} = 1$$

D'où : $L_eC_e\omega^2 \pm 4RC_e\omega - 1 = 0$

et

$$\omega_1 = \frac{4RC_e + \sqrt{16R^2C_e^2 + 4L_eC_e}}{2L_eC_e} = 10020{,}02 \text{ rad.s}^{-1}$$

$$\omega_2 = \frac{-4RC_e + \sqrt{16R^2C_e^2 + 4L_eC_e}}{2L_eC_e} = 9980{,}02 \text{ rad.s}^{-1}$$

On a donc : $\Delta\omega = \omega_1 - \omega_2 = 4\frac{R}{L_e} = \frac{4}{RC_1}$ et $\frac{\Delta\omega}{\omega_0} = \frac{\frac{4}{RC_1}}{\frac{1}{\sqrt{R^2C_1C_2}}} = 4\sqrt{\frac{C_2}{C_1}} = 0{,}004$

Le facteur de qualité : $Q' = \frac{\omega_0}{\Delta\omega} = \frac{1}{4}\sqrt{\frac{C_1}{C_2}} = 250$

On a donc transformé le filtre passe-bande très sélectif de la question **1)** en un filtre réjecteur très sélectif autour de la même pulsation $\omega_0 = 10000$ rad.s^{-1}.

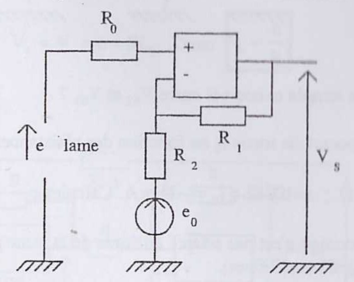
Problème n°20

D'après Concours national DEUG

On utilise une lame piézoélectrique dans la réalisation de détecteurs d'efforts mécaniques ou de vibrations. La tension e (souvent faible) engendrée entre les plaques métalliques du cristal est soumise à différents dispositifs électroniques pour y jouer le rôle de tension d'entrée. L'étude de la tension ou du courant de sortie permet d'accéder aux caractéristiques de la contrainte.
Tous les amplificateurs opérationnels envisagés dans ce problème sont des amplificateurs idéaux en fonctionnement linéaire.

La lame est soumise à une action mécanique indépendante du temps (une compression, par exemple) : la tension e est donc constante.

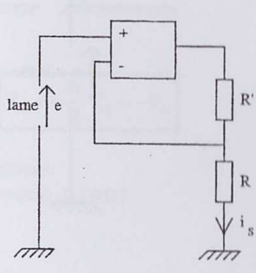
1) Le premier montage correspond à un amplificateur de tension :



1.1) Exprimer la tension de sortie V_S en fonction des résistances, de la f.é.m. e_0 et de la tension e.

1.2) Application numérique : $R_0 = 15\,k\Omega$; $R_1 = 10\,k\Omega$; $R_2 = 1\,k\Omega$; $e_0 = 0{,}1$ V.
La mesure donne $V_S = 7{,}25$ V ; calculer e.

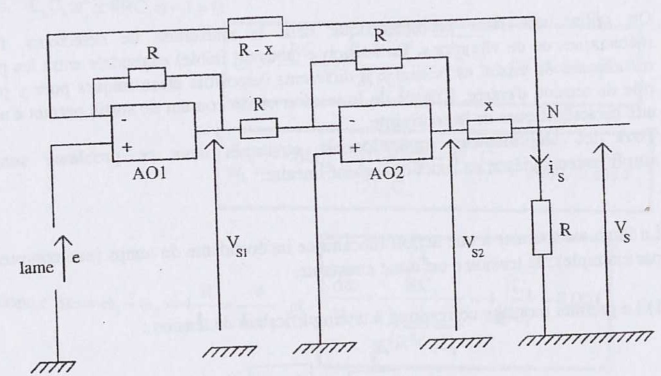
2) Le second montage est un convertisseur tension-courant :



2.1) Exprimer le courant de sortie i_S en fonction des résistances et de la tension e.

2.2) A.N. : $R = 1\,k\Omega$; $R' = 15\,k\Omega$; $i_S = 0{,}75$ mA.
Calculer e.

3) Le troisième montage fonctionne également en convertisseur tension-courant. (R−x) et x sont des résistances variables couplées (leur somme reste constante). V_{S1}, V_{S2} et V_S sont les tensions respectives à la sortie de l'A.O.1 , à la sortie de l'A.O.2 et à la sortie du système.

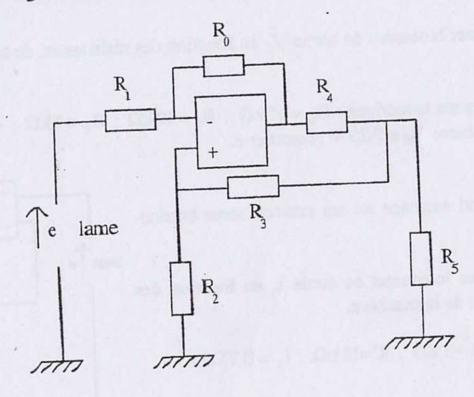


3.1) Quelle relation simple existe-t-il entre V_{S1} et V_{S2} ?

3.2) Exprimer le courant de sortie i_S en fonction des résistances et de la tension e ?

3.3) A.N. : $R = 1\,k\Omega$; $x=100\,\Omega$; $i_s = -15\,mA$. Calculer e.

4) Le quatrième montage n'est pas adapté à l'étude de la lame piézoélectrique. Expliquer pourquoi (quatre lignes maximum).



Corrigé

1.1) L'AO étant en régime linéaire, on peut écrire : $V_+ = V_- = e$ car $I_+ = 0$.
En appliquant le théorème de Millmann :

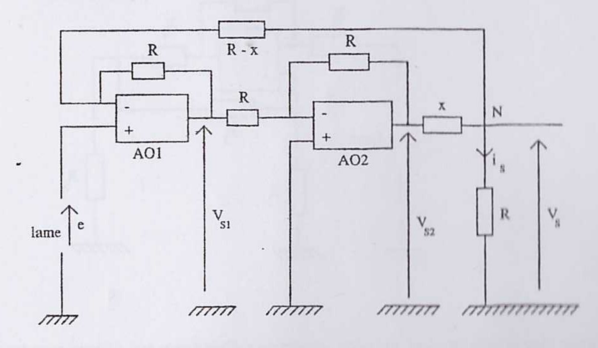
$$V_+ = V_- = e = \frac{\frac{e_0}{R_2} + \frac{V_S}{R_1}}{\frac{1}{R_2} + \frac{1}{R_1}} \;;\; \text{d'où } e = \frac{R_1 e_0 + R_2 V_S}{R_1 + R_2}$$

et $\boxed{V_S = \frac{R_1 + R_2}{R_2} e - \frac{R_1}{R_2} e_0}$

1.2) A.N. : en remplaçant dans l'expression de e trouvée en **1.1)** : $\boxed{e = 0{,}75\ V}$

2.1) On a directement : $V_+ = V_- = e = Ri_S$. Donc $\boxed{i_S = \frac{e}{R}}$

2.2) Donc $\boxed{e = 0{,}75\ V}$



3.1) L'AO2 est monté en inverseur ; on a directement : $\boxed{V_{S2} = -\frac{R}{R} V_{S1} = -V_{S1}}$

3.2) Pour l'AO1 on a $V_+ = V_- = e$ car on est en régime linéaire.
Appliquons le théorème de Millmann à l'entrée non-inverseuse de l'AO1 :

$$V_- = e = \frac{\frac{V_{S1}}{R} + \frac{V_S}{R-x}}{\frac{1}{R} + \frac{1}{R-x}} \;;\; \text{d'où} \;\; V_{S1} = \frac{2R-x}{R-x}e - \frac{R}{R-x}V_S \quad (1)$$

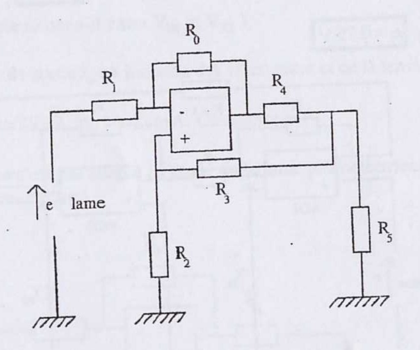
Appliquons ensuite le théorème de Millmann en N : $V_S = \dfrac{\frac{e}{R-x} + \frac{V_{S2}}{x}}{\frac{1}{R-x} + \frac{1}{x} + \frac{1}{R}} = Ri_S$ (2)

Remplaçons V_{S2} par $-V_{S1}$ et en tenant compte de la relation (1) :

$$\frac{e}{R-x} - \frac{1}{x}\left(\frac{2R-x}{R-x}e - \frac{R}{R-x}Ri_S\right) = \left(\frac{1}{R-x} + \frac{1}{x} + \frac{1}{R}\right)Ri_S$$

On en déduit : $i_S = \dfrac{\frac{e}{R-x} - \frac{1}{x}\frac{2R-x}{R-x}e}{R\left(\frac{1}{R-x} + \frac{1}{x} + \frac{1}{R}\right) - \frac{R^2}{x(R-x)}}$; soit après simplification : $\boxed{i_S = -\dfrac{2e}{x}}$

3.3 A.N. : $R = 1\,k\Omega$; $x = 100\,\Omega$; $i_S = -15\,mA$. On en déduit : $\boxed{e = -\dfrac{xi_S}{2} = 0{,}75\,V}$



4)
La lame piézoélectrique est un petit générateur électrique qui délivre une tension faible et qui présente une grande résistance interne ; elle ne peut donc pas délivrer de courant sans que la tension à ses bornes ne s'écroule.
Dans le montage proposé ici la lame débiterait un courant, alors qu'elle ne débite pas dans les montages précédents qui avaient une résistance d'entrée infinie (car $I_+ = 0$).


Achevé d'imprimer sur les presses de l'Imprimerie BARNÉOUD
53960 BONCHAMP-LÈS-LAVAL
Dépôt légal : septembre 2009 - N° d'imprimeur : 908056
Imprimé en France